FATTERELLARIO di PROBABILITÀ

2024 - 2025

scritto da ALESSIO SGUBIN
sulle lezioni di MARCO ROMITO e MARIO MAURELLI

TEORIA della MISURA

▸ DEF. σ-algebra / π-sistema / classe monotona

Sia Ω un insieme.

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è una σ-ALGEBRA se:
  i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
  ii) $\mathcal{A}$ chiuso per complementare.
  iii) $\mathcal{A}$ chiuso per unioni numerabili.

- $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è un π-SISTEMA se:
  i) $\Omega \in \mathcal{I}$.
  ii) $\mathcal{I}$ chiuso per intersezioni finite.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è una CLASSE MONOTONA se:
  i) $\Omega \in \mathcal{M}$.
  ii) $A, B \in \mathcal{M}$ con $A \subset B$ implica $B \setminus A \in \mathcal{M}$.
  iii) dati $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$ con $A_n \subseteq A_{n+1}\ \forall n$ vale $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

▸ TEOREMA Caratheodory

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra su un insieme Ω e sia $\mathbb{P}_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ funzione positiva e σ-additiva con $\mathbb{P}_0(\Omega) = 1$.
Allora esiste un'unica misura di probabilità $\mathbb{P}$ su $\sigma(\mathcal{A})$ che estende $\mathbb{P}_0$.

▸ TEOREMA della Classe Monotona

Sia $\mathcal{I}$ un π-sistema, la classe monotona generata da $\mathcal{I}$ (la minima classe monotona $\supseteq \mathcal{I}$) è una σ-algebra.

▸ Corollario

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ ed $\mathcal{I}$ un π-sistema che genera $\mathcal{F}$.
Se $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\mathbb{P}_1|_{\mathcal{I}} \equiv \mathbb{P}_2|_{\mathcal{I}}$ allora $\mathbb{P}_1 \equiv \mathbb{P}_2$.

Si ottiene una versione funzionale del Teorema della Classe Monotona.

▸ LEMMA

Sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile positiva. Allora esiste $(f_n)_{n\geq 1}$ successione di funzioni misurabili tale che $f_n \uparrow f$.

▸ TEOREMA della Classe Monotona (v. funzionale)

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ ed $\mathcal{I}$ un π-sistema che genera $\mathcal{F}$.

Sia $\mathcal{H}$ insieme di funzioni misurabili reali su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che:

(i) $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H} \quad \forall A \in \mathcal{I}$.

(ii) $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale.

(iii) se $(f_n)_n \subseteq \mathcal{H}$ con f_n positive e $f_n \uparrow f$ limitata, allora $f \in \mathcal{H}$.

Allora $\mathcal{H}$ contiene tutte le funzioni misurabili limitate.

Definiamo anche il completamento di una σ-algebra rispetto a $\mathbb{P}$...

▸ DEF. $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità. Definiamo

$$\mathcal{N} := \{ A \subseteq \Omega \mid \exists N \in \mathcal{F},\ A \subseteq N \text{ e } \mathbb{P}(N) = 0 \}$$

e allora $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} := \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$.

▸ TEOREMA

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità. Valgono i seguenti fatti:

(i) $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} = \{ A \subset \Omega \mid B \subset A \subset C \text{ con } B, C \in \mathcal{F} \text{ e } \mathbb{P}(C \setminus B) = 0 \}$.

(ii) $\mathbb{P}$ si estende in modo unico ad una probabilità su $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$.

Costruzione di Spazi di Probabilità

▸ Algebra dei Cilindri

Siano $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$ spazi di misura con $(\mu_i)_{i\in I}$ misure.

Vorremmo costruire μ misura di probabilità per tutti $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i\in I}$.

Consideriamo come insieme il prodotto $E := \bigotimes_{i\in I} E_i$.

Si definisce l'ALGEBRA dei CILINDRI come

$$\mathcal{C} := \left\{ \pi_J^{-1}(A) \; : \; J \subseteq I \text{ finito e } A \in \bigotimes_{i\in J} \mathcal{E}_i \right\}$$

dove la mappa è $\pi_J : E \longrightarrow \bigotimes_{i\in J} E_i$ proiezione.

Definiamo così la funzione $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ come

$$\mathcal{P}(\pi_J(A)) := \left(\bigotimes_{i\in J} \mu_i \right)(A)$$

su cui possiamo applicare il Teorema di Caratheodory: esiste una unica $\mathbb{P}$ misura di probabilità su $(E, \sigma(\mathcal{C}))$ che estende $\mathcal{P}$.

Usando questa costruzione, prese $X_i = \pi_{\{i\}}$, X_i ha legge μ_i.

▸ Completamento di $\mathcal{F}$ rispetto a $\mathbb{P}$

Consideriamo per $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\mathcal{N} := \{ A \subseteq \Omega \mid \exists N \in \mathcal{F},\ A \subseteq N \text{ e } \mathbb{P}(N) = 0 \}.$$

Definiamo $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$.

▸ Teorema

Valgono i seguenti fatti:

- $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} := \{ A \subset \Omega \mid \exists B, C \in \mathcal{F},\ B \subseteq A \subseteq C \text{ e } \mathbb{P}(C \setminus B) = 0 \}$.
- $\mathbb{P}$ si estende in modo unico ad una probabilità su $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$.

Ci interessa però estendere la costruzione con l'algebra dei cilindri oltre al caso di sole variabili aleatorie indipendenti.

Per fare questo...

DEF. Kernel di Probabilità

Siano $(E_1, \mathcal{E}_1)$ e $(E_2, \mathcal{E}_2)$ spazi di misura. Un KERNEL è

$$k : E_1 \times \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

tale che:

- per ogni $B \in \mathcal{E}_2$ la mappa $x \longmapsto k(x, B)$ è misurabile.
- per ogni $x \in E_1$, $k(x, \cdot)$ è misura di probabilità.

DEF. Composizione di Kernel

Siano $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i=1,2,3}$ spazi di misura e consideriamo due kernel

$$k_1 : E_1 \times \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad k_2 : (E_1 \times E_2) \times \mathcal{E}_3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

allora la COMPOSIZIONE $k_1 \otimes k_2$ sarà un nuovo kernel

$$k_1 \otimes k_2 : E_1 \times (\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita come

$$(k_1 \otimes k_2)(x, B) := \int_{E_2} \left(\int_{E_3} \mathbb{1}_B(y,z) \cdot k_2((x,y), dz) \right) k_1(x, dy) .$$

TEOREMA Ionescu - Tulcea

Dati $(E_n, \mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spazi di misura, sia k_n kernel della forma

$$\begin{cases} k_n : \prod_{j=1}^{n-1} E_j \times \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathbb{R} & \text{per } n \geq 1 \\ k_0 \quad \text{misura su } (E_0, \mathcal{E}_0) & \text{per } n = 0 . \end{cases}$$

Allora esiste un'unica misura di probabilità su $\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n , \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n \right)$, diciamo $\mathbb{P}$, tale che tramite le proiezioni $(\pi_{\{0,1,\dots,n\}})_\# \mathbb{P} = \bigotimes_{i=0}^{n} k_i$.

VARIABILI ALEATORIE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità ed $(E, \mathcal{E})$.

Una VARIABILE ALEATORIA è $X : \Omega \to E$ misurabile.

Possiamo definire la sua legge...

▸ DEF. Legge di X v.a.

La LEGGE di $X : \Omega \to E$ variabile aleatoria è

$$\mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}[X^{-1}(A)] =: X_\# \mathbb{P}(A).$$

... e la σ-algebra associata.

▸ DEF. $\sigma(X)$

Definiamo $\sigma(X) := \{ X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{E} \}$, che è la più piccola σ-algebra su Ω che rende X misurabile.

▸ LEMMA di Doob

Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(E, \mathcal{E})$ con $X : \Omega \to E$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variabili aleatorie con Y $\sigma(X)$-misurabile.

Allora esiste $g : E \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $Y = g(X)$.

Indipendenza

DEF. Eventi / Variabili Indipendenti

Una famiglia $(A_i)_{i\in I}$ arbitraria di eventi è INDIPENDENTE se:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i\in J} A_i\right] = \prod_{i\in J} \mathbb{P}[A_i] \quad \forall\, J \subseteq I \text{ finito.}$$

Le variabili $(X_i)_{i\in I}$ sono INDIPENDENTI se

$(X_i)_{i\in J}$ sono indipendenti $\forall\, J \subseteq I$ finito.

DEF. σ - algebre indipendenti

Dato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ delle σ-algebre $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{F}$ per $i \in J$ finito sono INDIPENDENTI se:

$\forall\, A_i \in \mathcal{G}_i \;\; \forall\, i \in J \qquad (A_i)_{i\in J}$ sono indipendenti.

Date allora $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ σ-algebre in $\mathcal{F}$ con I generico, sono INDIPENDENTI se $(\mathcal{G}_i)_{i\in J}$ indipendenti $\forall\, J \subseteq I$ finito.

LEMMA Indipendenza su π-sistemi

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(E_1, \mathcal{E}_1), (E_2, \mathcal{E}_2)$ con $X_1 : \Omega \to E_1$, $X_2 : \Omega \to E_2$.

Dati $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2$ π-sistemi che generano $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ allora:

$$X_1, X_2 \text{ indipendenti} \iff \mathbb{P}[X_1 \in A_1, X_2 \in A_2] = \mathbb{P}[X_1 \in A_1]\,\mathbb{P}[X_2 \in A_2] \quad \forall\, A_1 \in \mathcal{J}_1,\, A_2 \in \mathcal{J}_2.$$

Indipendenza: Risultati Asintotici

▸ **DEF.** σ-algebra coda

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di v.a. indipendenti.

Definiamo la σ-ALGEBRA CODA di $(X_n)_n$ ponendo prima

$$\mathcal{F}^n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \qquad \forall\, n \geq 1$$

e allora $\mathcal{F}^\infty := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}^n$ e' la σ-algebra coda.

▸ **TEOREMA** Legge 0,1 di Kolmogorov

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di v.a. indipendenti.

Allora la σ-algebra coda $\mathcal{F}^\infty$ è banale, cioè:

$$\forall\, A \in \mathcal{F}^\infty \qquad \mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}.$$

▸ **DEF.** limsup/liminf di eventi

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$. Definiamo:

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \text{definitivamente } \omega \in A_n\}$$

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \text{frequentemente } \omega \in A_n\}.$$

▸ **LEMMA** 1° Borel-Cantelli

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$. Vale che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty \implies \mathbb{P}[\limsup A_n] = 0.$$

▸ **LEMMA** 2° Borel-Cantelli

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(A_n)_{n\geq 1}$ a due a due indipendenti. Vale che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \infty \implies \mathbb{P}[\limsup A_n] = 1.$$

PROPOSIZIONE Proprietà liminf/limsup

(1) $\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf (\mathbb{1}_{A_n})$, $\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n (\mathbb{1}_{A_n})$.

(2) $\left(\limsup_n A_n\right)^c = \liminf_n A_n^c$

(3) $\mathbb{P}[\liminf_n A_n] \leq \liminf_n \mathbb{P}[A_n]$

$\limsup_n \mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}[\limsup_n A_n]$

(4) $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) < \infty\}$.

FATTO Inclusioni Utili

Siano (X_n) v.a. reali e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\forall \varepsilon > 0$:

$$\limsup_n \{X_n < \lambda - \varepsilon\} \subseteq \{\liminf_n X_n < \lambda\} \subseteq \limsup_n \{X_n < \lambda\}.$$

Funzione Caratteristica

DEF. Funzione Caratteristica

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ v.a.

La FUNZIONE CARATTERISTICA di X è $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ data da

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}\left[e^{it \cdot X} \right] = \int e^{it \cdot X(\omega)} \, \mathbb{P}(d\omega) \overset{!}{=} \int e^{it \cdot x} \, \mathbb{P}_X(dx) .$$

$\Vert\!\to$ φ_X dipende solo dalla legge di X

Proprietà Elementari

- $\varphi_X(0) = 1$ e $|\varphi_X(t)| \leq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$.
- Se $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ allora $\varphi_{AX+b}(t) = e^{it \cdot b} \varphi_X(A^t \cdot t)$.
- φ_X è uniformemente continua.
- Se X, Y sono indipendenti allora $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$.

FATTO Regolarità di φ_X

Siano $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ con $X = (X_1, \dots, X_d)$ e $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che $\mathbb{E}\left[|X_1|^{a_1} \cdot \ldots \cdot |X_d|^{a_d} \right] < \infty$ e allora esiste

$$\partial_{t_1}^{a_1} \dots \partial_{t_d}^{a_d} \varphi_X(t) = i^{a_1 + \dots + a_d} \, \mathbb{E}\left[X_1^{a_1} \dots X_d^{a_d} e^{it \cdot X} \right].$$

FATTO Integrali & Misure immagine

Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $X : \Omega \to \mathbb{R}$ di legge $\mathbb{P}_X$ e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile, allora

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \, \mathbb{P}_X(dx).$$

Vogliamo ora vedere che φ_X identifica univocamente la legge della variabile aleatoria ...

LEMMA Densità di $X+Y$

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed X, Y v.a. indipendenti. Sia f_Y densità di Y, allora $X+Y$ avrà densità $z \longmapsto \mathbb{E}[f_Y(z-X)]$.

Corollario

Sia X v.a. reale e Z Gaussiana standard indipendente da X:

- la densità g_ε di $X+\sqrt{\varepsilon}$ è continua e limitata.
- se X ha densità f continua limitata allora

$$g_\varepsilon \leq \sup f \qquad \text{e} \qquad g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f \text{ uniformemente.}$$

TEOREMA Identità di Parseval

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed X v.a. reale con densità f continua limitata.

Allora:

$$\int |\varphi_X(t)|^2 \, dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx.$$

Corollario Formula di Inversione

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed X v.a. reale tale che φ_X sia integrabile.

Allora X ha densità continua e limitata

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t) \, e^{-itx} \, dt.$$

Si ottiene che φ_X e $\mathbb{P}_X$ danno le stesse informazioni...

TEOREMA φ_X caratterizza $\mathbb{P}_X$

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e X, Y variabili aleatorie su $\mathbb{R}^d$.

Se $\varphi_X = \varphi_Y$ allora X, Y hanno la stessa legge.

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed X, Y variabili aleatorie tali che

$$\begin{cases} \mathbb{E}X^n = \mathbb{E}Y^n < \infty & \forall\, n \geq 1 \\ \mathbb{E}|X|^n, \mathbb{E}|Y|^n \leq \frac{n!}{r} \cdot M \end{cases}$$

allora $\varphi_X \equiv \varphi_Y$. In particolare hanno la stessa legge.

TEOREMA Indipendenza e φ_X

X, Y indipendenti $\iff \varphi_{(X,Y)}(s,t) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t) \quad \forall\, s,t.$

~ ∘ ~

DEF. Funzione Generatrice

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e X v.a. reale. La FUNZIONE GENERATRICE dei MOMENTI sarà $\Psi_X(t) := \mathbb{E}[e^{t \cdot X}]$.

Il suo dominio sarà $\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbb{E}[e^{tX}] < \infty\}$.

PROPOSIZIONE

Sia Ψ_X definita in un intorno di 0. Allora:

1) X ha momenti di ogni ordine.
2) Ψ_X è analitica in un intorno di 0.
3) esistono $M, r \geq 0$ tali che $\mathbb{E}|X|^n \leq M \frac{n!}{r}$.
4) se $\Psi_X = \Psi_Y$ allora X, Y hanno la stessa legge.

FATTO

X, Y indipendenti $\iff \Psi_{(X,Y)}(s,t) = \Psi_X(s) \cdot \Psi_Y(t) \quad \forall\, s,t.$

Convergenza di Variabili Aleatorie

DEF. Convergenza in Probabilità

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$, X variabili aleatorie.

Diciamo che $X_n \to X$ in PROBABILITÀ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}[|X - X_n| > \varepsilon] \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

DEF. Convergenza Quasi-Certamente

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$, X variabili aleatorie.

Diciamo che $X_n \to X$ QUASI-CERTAMENTE se:

$$\mathbb{P}[\lim_n X_n = X] = 1.$$

DEF. Convergenza in Media

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$, X variabili aleatorie.

Diciamo che $X_n \to X$ in MEDIA $\mathcal{L}^p$ se:

$$\|X - X_n\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

TEOREMA Implicazioni tra Convergenze

(1) Convergenza in media $\mathcal{L}^p$ $\Rightarrow$ Convergenza in probabilità.

(2) Convergenza quasi-certamente $\Rightarrow$ Convergenza in probabilità.

(3) Convergenza in probabilità $\Rightarrow$ $\exists$ sottosuccessione convergente quasi-certamente.

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_n$, X variabili aleatorie. Sono equivalenti:

(1) $X_n \to X$ in probabilità.

(2) ogni successione estratta da $(X_n)_n$ ha sottosucc. convergente q.c. ad X.

PROPOSIZIONE ConvDom in probabilità

Siano $X_n \to X$ in probabilità con $|X_n| \leq Y$ per $\mathbb{E}|Y| < \infty$.
Allora $X_n \to X$ in media $\mathcal{L}^1$.

TEOREMA

Lo spazio $L^0 = \mathcal{L}^0/\sim$ è completo, con $f \sim g$ se $f = g$ q.c.

Corollario

Lo spazio $L^p = \mathcal{L}^p/\sim$ è completo $\forall\, p \in [1, \infty)$.

Convergenza di Misure (i.e. in legge)

DEF. Convergenza Stretta / Debole / Vaga

Siano $(\mu_n)_n, \mu$ misure su $\mathbb{R}^d$. Allora:

- $\mu_n \to \mu$ STRETTAMENTE se $\int g \, d\mu_n \to \int g \, d\mu \quad \forall g \in C_b$.
- $\mu_n \to \mu$ DEBOLMENTE se $\int g \, d\mu_n \to \int g \, d\mu \quad \forall g \in C_0$.
- $\mu_n \to \mu$ VAGAMENTE se $\int g \, d\mu_n \to \int g \, d\mu \quad \forall g \in C_c$.

FATTO

Le convergenze si implicano nell' ordine:

stretta $\Rightarrow$ debole $\Rightarrow$ vaga.

PROPOSIZIONE Vaga "$\Rightarrow$" Debole

Siano $(\mu_n)_n, \mu$ misure finite su $\mathbb{R}$. Vale che:

$$\mu_n \to \mu \text{ vaga e } \sup_n \mu_n(\mathbb{R}) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu_n \to \mu \text{ debole.}$$

PROPOSIZIONE Vaga "$\Rightarrow$" Stretta

Siano $(\mu_n)_n, \mu$ misure finite su $\mathbb{R}$. Vale che:

$$\mu_n \to \mu \text{ vaga e } \mu_n(\mathbb{R}) \to \mu(\mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad \mu_n \to \mu \text{ stretta.}$$

PROPOSIZIONE Convergenze con F_μ

Siano $(\mu_n)_n$ misure di probabilità e μ misura finita su $\mathbb{R}$.

(i) $\mu_n \to \mu$ strettamente $\Rightarrow$ $F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x)$ $\forall x$ pto continuità F_μ.

(ii) $F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x)$ $\forall x \in D$ denso $\Rightarrow$ $\mu_n \to \mu$ vagamente.

TEOREMA Helly

Siano $(\mu_n)_n$ probabilità su $\mathbb{R}$. Esiste una sottosuccessione estratta che converge debolmente.

Un altro criterio di convergenza stretta richiede che "la massa non vada all'infinito"...

DEF. Famiglia Tesa (Tight)

Una famiglia $\mathcal{M}$ di misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$ è TESA se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^d$ compatto tale che $\mu_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \ \forall n$.

TEOREMA Proborov

Sia $\mathcal{M}$ famiglia di misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$. Sono equivalenti:

(1) $\mathcal{M}$ è famiglia tesa.

(2) $\mathcal{M}$ è sequenzialmente relativamente compatta per convergenza stretta.

FATTO

Sia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ tale che $c_0 = \sup_n \int |x| \mu_n(dx) < \infty$.

Allora $(\mu_n)_n$ è tesa.

TEOREMA Portmanteau

Siano $(\mu_n)_{n\geq 1}, \mu$ misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$. Sono equivalenti:

1) $\mu_n \to \mu$ strettamente.

2) $\mu(A) \leq \liminf_n \mu_n(A) \quad \forall A$ aperto.

3) $\limsup_n \mu_n(C) \leq \mu(C) \quad \forall C$ chiuso.

4) $\mu(B) = \lim_n \mu_n(B) \quad \forall B$ tale che $\mu(\partial B) = 0$.

5) $\int f(x)\mu(dx) \leq \liminf_n \int f(x)\mu_n(dx) \quad \forall f$ semicont. inferiore.

6) $\limsup_n \int f(x)\mu_n(dx) \leq \int f(x)\mu(dx) \quad \forall f$ semicont. superiore.

7) $\int f(x)\mu(dx) = \lim_n \int f(x)\mu_n(dx) \quad \forall f$ con $\mu($pti disc. di $f) = 0$.

Convergenza in Legge

DEF. Convergenza in Legge

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^d$. Diciamo che $X_n \to X$ IN LEGGE se $\mathbb{P}_{X_n} \to \mathbb{P}_X$ strettamente come misure (equiv. vagamente/debolmente per misure di probabilità).

PROPOSIZIONE Def. equivalente

$X_n \to X$ in legge $\iff$ $\forall g \in C_b$ $\mathbb{E}[g(X_n)] \to \mathbb{E}[g(X)]$.

PROPRIETÀ ELEMENTARI

- Sia $X_n \to X$ in legge con h continua. Allora
  $h(X_n) \to h(X)$ in legge.
- Se $X_n \to X$ in probabilità, allora $X_n \to X$ in legge.
- Se $X_n \to c$ in legge con c costante, $X_n \to X$ in probabilità.

TEOREMA Convergenza e FdR

Siano $(X_n)_{n\geq 1}, X$ variabili aleatorie reali. Sono equivalenti:

- $X_n \to X$ in legge.
- $F_{X_n} \to F_X$ sui punti di continuità di F_X.
- $F_{X_n} \to F_X$ su un denso.

TEOREMA Lévy

Siano $(X_n)_{n\geq 1}, X$ v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$. Sono equivalenti:

- $X_n \to X$ in legge.
- se $\varphi_{X_n} \to \varphi$ puntualmente con φ continua in 0, $\exists X$ v.a. $\varphi = \varphi_X$.

La convergenza in legge è più debole, ma con opportune modifiche riusciamo a migliorarla...

TEOREMA Skorohod

Siano $(X_n)_{n\geq 1}, X$ variabili aleatorie con $X_n \to X$ in legge.
Allora esistono $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ spazio di probabilità e $\tilde{X}_n, \tilde{X}$ variabili aleatorie tali che $\tilde{X}_n \overset{\text{legge}}{=} X_n$, $\tilde{X} \overset{\text{legge}}{=} X$ e $\tilde{X}_n \to \tilde{X}$ q.c.

Teoremi Limite

TIPS
- → se abbiamo $\frac{\sum X_i}{n}$ ho LGN
- → se abbiamo $\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$ ho TLC

► Legge dei Grandi Numeri

► TEOREMA LGN classico

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con stessa distribuzione.

Se $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ allora: $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1$

dove $S_n = X_1 + \_ + X_n$.

Distinguiamo due categorie distinte di LGN...

► DEF. LGN Debole/Forte

Diciamo che $(X_n)_{n\geq 1}$ soddisfa la LEGGE dei GRANDI NUMERI

- DEBOLE: se $\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
- FORTE: se $\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) \xrightarrow{q.c.} 0$. * suppongo $\mathbb{E}|X_n| < \infty \ \forall n$

► TEOREMA LGN Debole (con $\mathbb{E}X_1$)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_n$ v.a. iid tali che $\mathbb{E}X_1 < \infty$.

Allora vale la legge dei grandi numeri debole.

► PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. iid tali che

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \mathbb{P}[|X_1| \geq x] = 0.$$

Dati allora $m_n := \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq n\}}]$ vale che:

$$\frac{1}{n}(S_n - m_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

► FATTO

Sia $X \geq 0$ e $p \geq 1$: $\mathbb{E}X^p = \int_0^{+\infty} p x^{p-1} \mathbb{P}[X \geq x]\, dx$.

TEOREMA LGN Forte (con $\mathbb{E}X_1^4$)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. iid tali che $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$.

Allora vale la legge dei grandi numeri forte.

TEOREMA LGN Forte (con $\sum_n \frac{1}{n^2} Var(X_n)$)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con $\sum_n \frac{1}{n^2} Var(X_n) < \infty$.

Allora vale la legge dei grandi numeri forte.

TEOREMA LGN Forte di Kolmogorov (con $\mathbb{E}X_1$)

Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. iid tali che $\mathbb{E}X_1 < \infty$.

Allora vale la legge dei grandi numeri forte.

PROPOSIZIONE Disuguaglianza di Kolmogorov

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con

$$\mathbb{E}X_n = 0 \qquad e \qquad \mathbb{E}X_n^2 < \infty \qquad \forall n \geq 1.$$

Allora $\forall \varepsilon > 0$:
$$\mathbb{P}\left[\max_{k=1,\dots,n} |S_k| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}S_n^2.$$

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con

$$\mathbb{E}X_n = 0 \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n^2 < \infty.$$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2$ converge quasi certamente.

LEMMA Kronecker

Sia $a_n \uparrow \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{a_n}$ convergente. Allora $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} y_n \longrightarrow 0$.

Per concludere abbiamo un ulteriore risultato...

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_n$ v.a. iid. Allora:

1) se $\mathbb{E}|X_1| = +\infty \implies \mathbb{P}[\{\lim \frac{S_n}{n} \text{ esiste } < \infty\}] = 0$.

2) se $\mathbb{P}[\{\lim \frac{S_n}{n} \text{ esiste } < \infty\}] = 1 \implies \mathbb{E}|X_1| = +\infty$.

3) se $\mathbb{E}X_1^+ = +\infty$ ed $\mathbb{E}X_1^- < \infty \implies \frac{S_n}{n} \to +\infty$ q.c.

TEOREMA del LIMITE CENTRALE

IDEA: se LGN dava il limite per S_n/n, il TLC mi quantifica le oscillazioni della successione attorno al limite (i.e. la velocità di convergenza $\sim \sqrt{n}$)

Definiamo il seguente...

DEF. Variabile Gaussiana Reale

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $d \geq 1$. Una VARIABILE GAUSSIANA è una variabile aleatoria reale per cui esistono $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0, \infty)$ con cui

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2} \quad \text{è densità.}$$

DEF. Vettore Gaussiano

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un VETTORE GAUSSIANO è $X = (X_1, \dots, X_d)$ una variabile aleatoria in $\mathbb{R}^d$ tale che

$$\forall u \in \mathbb{R}^d \quad u \cdot X \text{ è variabile aleatoria reale Gaussiana.}$$

OSS.

Un vettore Gaussiano ha momenti di ogni ordine $\mathbb{E}[|X_1|^{e_1} \cdot \ldots \cdot |X_d|^{e_d}]$.

DEF. Media e Covarianza

Data X v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$, definiamo:

- VETTORE della MEDIA $\quad m = \mathbb{E}X := (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_d)$.
- MATRICE di COVARIANZA $\quad Q_{ij} := \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \quad \forall i,j$.

Proposizione

La media e la covarianza identificano univocamente la legge di un vettore Gaussiano, con funzione caratteristica:

$$\varphi_X(u) = e^{iu\cdot m - \frac{1}{2}u^T\cdot Qu}.$$

Proprietà Vettori Gaussiani

- **Trasformazioni lineari**: sia $X \sim N(m,Q)$ a valori in $\mathbb{R}^d$.
  Dati $n \in \mathbb{R}^k$ e $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$ si ottiene $n + AX \sim N(n+Am, AQA^T)$.
- **Esistenza**: siano $m \in \mathbb{R}^d$ e $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ simmetrica e semidefinita positiva. Allora esiste un vettore Gaussiano $N(m,Q)$.
- **Densità**: se la matrice di covarianza è non-singolare, allora il vettore Gaussiano ammette una densità:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \cdot \det Q}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T Q^{-1}(x-m)}$$

Proposizione

Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di vettori Gaussiani tali che $X_n \xrightarrow{legge} X$.
Allora X è un vettore Gaussiano.

Possiamo ora enunciare il TLC...

Teorema TLC unidimensionale

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. reali indipendenti con la stessa distribuzione ed $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Allora

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{legge} N(0,1).$$

Si estende subito in più dimensioni...

TEOREMA ~~TLC multidimensionale~~

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con stessa distribuzione, a valori in $\mathbb{R}^d$ ed $\mathbb{E}|X_1|^2 < \infty$. Allora:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{legge}} \mathcal{N}(0, Q) \qquad \text{dove } Q = \mathrm{Cov}(X_1).$$

- **OSS.**

Siano $(X_n)_n$ Cauchy indipendenti. Allora $\frac{S_n}{n} \sim$ Cauchy ($\neq$ Gaussiano).

TEOREMA ~~TLC (non iid)~~

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_n$ indipendenti tali che:

- $\mathbb{E}X_n = m \in \mathbb{R} \qquad \forall n.$
- $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2 \in \mathbb{R} \qquad \forall n.$
- $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^3 < \infty.$

Allora vale il Teorema del Limite Centrale.

LEMMA 1

Siano $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ tali che $|z_i|, |w_i| \leq \theta$. Allora:

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i - \prod_{i=1}^n w_i \right| \leq \theta^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n |z_i - w_i| .$$

LEMMA 2

Per ogni $n \geq 1$ esiste un $c_n > 0$ tale che:

$$\left| e^{it} - \left(1 + it - \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{(it)^n}{n!} \right) \right| \leq c_n t^{n+1} .$$

Abbiamo solo enunciato altre versioni del TLC...

TEOREMA Lindeberg

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ indipendenti con $\mathbb{E}X_n = 0$ $\forall n \geq 1$.

Poniamo $D_n = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k)$. Se per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$\lim_n \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k| \geq \varepsilon D_n\}}\right] = 0$$

allora vale il TLC.

TEOREMA Berry-Esseen (velocità di convergenza)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $(X_n)_{n\geq 1}$ indipendenti con stessa distribuzione.

Supponiamo che $\mathbb{E}X_1 = 0$ e $\mathbb{E}X_1^2 = \sigma^2$ e $\mathbb{E}|X_1|^3 = \rho^3$.

Allora vale che $|F_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{3\rho^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$

dove
- F_n funzione involutiva di $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$.
- ϕ funzione involutiva della Gaussiana standard.

LEGGI STABILI

Il seguente risultato ci descrive possibili limiti delle somme S_n...

TEOREMA

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti identicam. distribuite tali che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}[X_1 > x]}{\mathbb{P}[|X_1| > x]} = \vartheta \in [0,1] \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[|X_j| > x] = \frac{L(x)}{x^\alpha}$$

dove L è a VARIAZIONE LENTA cioè $\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$ $\forall t > 0$.

Prendiamo le quantità:

$$a_n = \inf\left\{x \mid \mathbb{P}[|X_1| > x] \leq \frac{1}{n}\right\} \qquad b_n = n\mathbb{E}\left[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq a_n\}}\right]$$

e allora $\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{legge}} Y$ che ha distribuzione α-STABILE.

vedi sotto

DEF. Distribuzione α-Stabile

Una variabile aleatoria Y ha distribuzione α-STABILE se dati:

$$\alpha \in [0,2] \qquad \theta \in [0,1] \qquad b > 0 \qquad c \in \mathbb{R}$$

la sua funzione caratteristica e'

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(ict - b|t|^\alpha \left(1 + i(2\theta - 1)\,\mathrm{sgn}(t)\, w_\alpha(t) \right) \right)$$

dove

$$w_\alpha(t) = \begin{cases} \tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \log(|t|) & \text{se } \alpha = 1 . \end{cases}$$

DEF. Legge Stabile

Una legge μ si dice STABILE se $\forall k \ \exists a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tali che:

" $Y_1, \dots, Y_k$ indipendenti di legge μ " $\Rightarrow$ " $\dfrac{Y_1 + \dots + Y_k - b_k}{a_k}$ ha legge μ ".

Otteniamo il seguente risultato generale:

TEOREMA Leggi Stabili

Sia μ una legge. Vale che:

$$\mu \text{ e' STABILE} \iff \mu \text{ e' limite di un TLC} .$$

In particolare, le uniche leggi stabili sono le leggi α-stabili.

SPERANZA CONDIZIONALE

▸ **DEF.** Speranza Condizionale

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità ed $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ una σ-algebra. Sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ variabile aleatoria. La sua SPERANZA CONDIZIONALE data $\mathcal{F}$ è una variabile aleatoria $\tilde{X}$ con:

(i) $\tilde{X}$ $\mathcal{F}$-misurabile.

(ii) $\tilde{X} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(iii) $\mathbb{E}[\tilde{X} \cdot \mathbb{1}_F] = \mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_F] \quad \forall F \in \mathcal{F}$.

Una variabile aleatoria $\tilde{X}$ con tali proprietà si indica $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.

▸ **ESEMPI**

(a) Sia $\mathcal{F}$ generata da una partizione $F_1, \ldots, F_n$ di Ω $(n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mathbb{P}[F_i]} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_{F_i}] \mathbb{1}_{F_i}.$$

(b) Data (X, Y) assolutamente continua con $f_{(X,Y)}$ densità:

$$\mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)] := \tilde{id}(Y)$$

dove $\tilde{id}(y) := \int_{\mathbb{R}} x \, f_{X|Y}(x \mid y) \, dx$.

▸ **PROPOSIZIONE** Interpretazione Geometrica $\exists$ in L^2

Sia $X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ variabile aleatoria. Fissato $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebra esiste un unico $\tilde{X} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ che minimizza

$$\begin{aligned} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ V &\longmapsto \mathbb{E}[|X - V|^2]. \end{aligned}$$

In particolare $\tilde{X}$ si rivela essere $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.

Il risultato si estende in realtà ad $X \in L^1$...

TEOREMA $\exists!$ **Speranza Condizionale**

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ed $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebra. Data $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ esiste $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ unica quasi-certamente

LEMMA

Sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ variabile aleatoria:

- $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \implies X \geq 0$ quasi-certamente.
- $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \implies X = 0$ quasi-certamente.

PROPRIETÀ di $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$

(1) $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]\big] = \mathbb{E}[X]$.

(2) La mappa $X \mapsto \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ è lineare.

(3) Se $X \leq Y$ q.c. allora $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]$ q.c.

(4) Se X è $\mathcal{F}$-misurabile allora $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$ q.c.

(5) Se X è indipendente da $\mathcal{F}$ allora $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$ q.c.

(6) Date $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebre vale che

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{G}\big] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}].$$

(7) Ci sono proprietà di convergenza analoghe:

- MONOTONA: se $X_n, X \in L^1$ con $X_n \uparrow X$ allora anche $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] \uparrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$.
- DOMINATA: se $X_n, X \in L^1$ con $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ ed $|X_n| \leq Y \in L^1$, allora $\mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}] \to \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]$ q.c. e in L^1.
- FATOU: se $X_n \in L^1$ allora $\mathbb{E}\big[\underline{\lim}_n X_n \mid \mathcal{F}\big] \leq \underline{\lim}_n \mathbb{E}[X_n \mid \mathcal{F}]$.

TIPS

(1) Si usa spesso, con qualsiasi $\mathcal{F}$ vale!

(8) Siano $X, X\cdot Y \in L^1$ ed Y $\mathcal{F}$-misurabile. Allora
$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{F}] = Y \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}].$$

(9) JENSEN: sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa con $X, \varphi(X) \in L^1$. Allora
$$\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}].$$

(10) Sia $p \in [1, +\infty]$ e $X \in L^p$. Allora:
$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \in L^p \quad \text{e} \quad \| \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \|_{L^p} \leq \| X \|_{L^p}.$$

▸ LEMMA Freezing Lemma

Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ una σ-algebra ed X, Y variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, a valori in $\mathbb{R}^k$ ed $\mathbb{R}^h$ rispettivamente. Supponiamo che

X indipendente da $\mathcal{F}$ e Y $\mathcal{F}$-misurabile.

Data una funzione $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h$ Boreliana limitata, definiamo
$$\forall y \in \mathbb{R}^h \qquad \phi(y) := \mathbb{E}[\varphi(X, y)].$$
Segue che ϕ è Boreliana e verifica
$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y) \mid \mathcal{F}] = \phi(Y).$$

Concludiamo con un risultato sulla possibilità di definire la probabilità condizionata ad un valore preciso "$Y = y$".

▸ TEOREMA

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, S_1, S_2 spazi polacchi. Consideriamo v.a. $X : \Omega \to S_1$ e $Y : \Omega \to S_2$ ed $A \in \mathcal{B}(S_1)$, $y \in S_2$.

$\Rightarrow \exists$ una funzione
$$\begin{aligned} S_2 \times \mathcal{B}(S_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, A) &\longmapsto \mathbb{P}[X \in A \mid Y = y] \end{aligned}$$
tale che

- $\forall A \in \mathcal{B}(S_1) \quad \mathbb{P}[X \in A \mid Y = y] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X) \mid Y = y].$

- $\forall y \in S_2 \quad A \longmapsto \mathbb{P}[X \in A \mid Y = y]$ è probabilità su $\mathcal{B}(S_1)$.

$\Rightarrow \mathbb{P}[X \in A \mid Y = y]$ dipende dalla sola legge congiunta di (X, Y).

Catene di Markov

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità ed S insieme di stati $(\# \leq \aleph_0)$.

Siano $(X_n)_{n \geq 0}$ variabili aleatorie a valori in S.

DEF. Filtrazione

Una FILTRAZIONE su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ è una successione crescente di σ-algebre contenute in $\mathcal{F}$.

DEF. Catena di Markov

La successione $(X_n)_{n \geq 0}$ è CATENA di MARKOV se, posta $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ filtrazione, vale che

$$\forall n \geq 0 \quad \forall x \in S \qquad \mathbb{P}[X_{n+1} = x \mid \mathcal{F}] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x \mid X_n].$$

Vale la seguente caratterizzazione:

TEOREMA

La successione $(X_n)_{n \geq 0}$ è catena di Markov se e solo se "$\forall x_0, \ldots, x_{n+1} \in S$ tali che $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] > 0$ vale che $\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]$."

TEOREMA

Data la successione $(X_n)_{n \geq 0}$, poniamo:

- la LEGGE INIZIALE $\qquad q_x = \mathbb{P}[X_0 = x]$
- la PROBABILITÀ di TRANSIZIONE $\qquad p^n_{xy} = \mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x]$

per ogni $x, y \in S$ ed $n \geq 0$. Allora vale che

$$(X_n)_{n \geq 0} \text{ catena di Markov} \iff \mathbb{P}[X_0 = x, \ldots, X_n = x_n] = q_{x_0} p^0_{x_0 x_1} \cdots p^{n-1}_{x_{n-1} x_n}.$$

- **OSS:** legge iniziale e probabilità di transizione identificano una catena di Markov univocamente.

DEF. Matrice Stocastica

Definiamo i seguenti oggetti :

$$\begin{cases} Q := (q_x)_{x \in S} \\ P^n := (p^n_{xy})_{x,y \in S} \quad \text{per } n \geq 0 \end{cases}$$

MATRICE STOCASTICA.

OSS. Per definizione $\sum_{x \in S} q_x = 1$ e $\sum_{y \in S} p^n_{xy} = 1$.

Si può definire la moltiplicazione :

$$(P^n P^{n+1})_{x,y} := \sum_{z \in S} P^n_{xz} P^{n+1}_{zy} .$$

Corollario

Se $(X_n)_{n \geq 0}$ è catena di Markov allora :

$$\mathbb{P}[X_n = x_n] = \sum_{x_0, \dots, x_{n-1} \in S} q_{x_0} p^0_{x_0 x_1} \dots p^{n-1}_{x_{n-1} x_n} = (Q P^0 \dots P^{n-1})_{x_n} .$$

TEOREMA

Consideriamo $(X_n)_n$ successione di variabili aleatorie :

$(X_n)_{n \geq 0}$ catena di Markov $\Leftrightarrow$ $\forall n > 0$ il "passato" e il "futuro" sono indipendenti da X_n.

Più precisamente $\forall n \geq 1$ $\forall x \in S$ fissiamo $X_n = x$. Allora :

$(X_{n+m})_{m \geq 0}$ è catena di Markov indipendente da $(X_0, \dots, X_{n-1})$.

Ci mettiamo ora in un setting speciale, dove le probabilità di transizione non dipendono più dal "tempo" n ...

DEF. Catena Omogenea

Una catena $(X_n)_{n\geq 0}$ è OMOGENEA se come funzione in $x, y \in S$

$\mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x] = p^n_{xy}$ non dipende da $n \geq 0$.

- OSS: fissato $x \in S$, la probabilità $\mathbb{P}[X_{n+1} = x \mid X_n]$ dipende da n,

ma soltanto tramite la v.a. X_n.

Se fissiamo il valore di X_n allora non dipende più da n.

- OSS: data $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea, la legge di X_n

sarà data da $Q \cdot P^n$.

Segue che nel caso omogeneo $\mathbb{P}^{n+m} = \mathbb{P}^n \cdot \mathbb{P}^m$.

PROPOSIZIONE Formula di Chapman-Kolmogorov

Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea. Allora $\forall m, n, r > 0 \ \forall x, z \in S$:

$$\mathbb{P}[X_{n+m+r} = z \mid X_m = x] = \sum_{y \in S} \mathbb{P}[X_{n+m+r} = z \mid X_{n+m} = y] \cdot \mathbb{P}[X_{n+m} = y \mid X_n = x].$$

Catene di Markov : Tempo di Arrivo

Vediamo come formalizzare il tempo di arrivo in uno stato...

DEF. Tempo di Arrivo

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed S spazio di stati, $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea ed $A \subseteq S$ sottoinsieme. Il suo TEMPO di ARRIVO e'

$$U_A := \inf(\{ n \geq 0 \mid X_n \in A\} \cup \{+\infty\}).$$

Poniamo inoltre le quantità:

$$a_{A,x} := \mathbb{P}[U_A < \infty \mid X_0 = x] \quad \text{e} \quad m_{A,x} := \mathbb{E}[U_A \mid X_0 = x].$$

Il seguente risultato caratterizza queste quantità...

TEOREMA

La famiglia $(a_{A,x})_{x\in S}$ è la <u>minima</u> soluzione del sistema:

$$\begin{cases} a_x = 1 & \text{se } x \in A \\ a_x = \sum_{y\in S} p_{x,y} a_y & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Per soluzione "minima" si intende che $\forall (a_x)_{x\in S}$ soluzione vale:

$$a_x \geq a_{A,x} \quad \forall x \in S.$$

La famiglia $(m_{A,x})_{x\in S}$ è la <u>minima</u> soluzione del sistema:

$$\begin{cases} m_x = 0 & \text{se } x \in A \\ m_x = 1 + \sum_{y\notin A} p_{xy} m_y & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Catene di Markov: Comportamento Asintotico

Lo studio asintotico si basa sulla definizione di...

DEF. Stato Ricorrente / Transiente

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed S spazio degli stati. Data $(X_n)_n$ catena omogenea:

- $x \in S$ è RICORRENTE se $\mathbb{P}[\exists\, n \geq 1 \;\; X_n = x \mid X_0 = x] = 1$.
- $x \in S$ è TRANSIENTE se $\mathbb{P}[\exists\, n \geq 1 \;\; X_n = x \mid X_0 = x] < 1$.

DEF. Tempo di Primo Passaggio / Arrivo

Sia $x \in S$, poniamo:

- $T_x := \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\}$ TEMPO di PRIMO PASSAGGIO
- $U_x := \inf\{n \geq 0 \mid X_n = x\}$ TEMPO di PRIMO ARRIVO.

Dati $x, y \in S$ si definiscono:

- $f_{xy}(n) := \mathbb{P}[T_x = n \mid X_0 = y]$
- $f_{xy} := \sum_{n \geq 0} f_{xy}(n)$.

- **OSS:** segue dalle definizioni che

$$x \in S \text{ ricorrente} \iff \mathbb{P}[T_x < \infty \mid X_0 = x] = 1$$
$$\iff f_{xx} = 1$$
$$x \in S \text{ transiente} \iff \mathbb{P}[T_x < \infty \mid X_0 = x] < 1.$$

DEF. Numero di Visite

Sia $x \in S$. Definiamo il NUMERO DI VISITE:

$$N_x = \operatorname{card}\{n \geq 0 \mid X_n = x\}.$$

PROPOSIZIONE

Sia $x \in S$, valgono le caratterizzazioni:

(i) $x \in S$ ricorrente $\iff$ $\mathbb{E}[N_x \mid X_0 = x] = +\infty$.

(ii) $x \in S$ ricorrente $\iff$ $\mathbb{P}[N_x = \infty \mid X_0 = x] = 1$.

LEMMA

Siano $x, y \in S$, poniamo $p_{xy}(n) := \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x]$ e

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{x,y}(t) := \sum_{n \geq 0} p_{xy}(n) t^n & \text{dove } p_{xy}(0) = \delta_{xy}. \\ \mathcal{F}_{x,y}(t) := \sum_{n \geq 0} f_{xy}(n) t^n & \text{dove } f_{xx}(0) = 0. \end{cases}$$

Allora nell'insieme di convergenza $|t| < 1$ troviamo:

$$\mathcal{P}_{xy}(t) = p_{xy}(0) + \mathcal{F}_{xy}(t) \mathcal{P}_{yy}(t)$$

e in particolare ne segue che:

$$\mathcal{P}_{xx}(t) = 1 + \mathcal{F}_{xx}(t) \mathcal{P}_{xx}(t).$$

Vogliamo studiare più nel particolare come interagiscono gli stati tra di loro:

DEF. Comunicazione

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(X_n)_{n \geq 0}$ catena di Markov omogenea su S.

Dati $x, y \in S$, si dice che

- x CONDUCE a y: $x \to y$ se $\mathbb{P}[\exists n \geq 0 \ X_n = y \mid X_0 = x] > 0$.
- x e y COMUNICANO: $x \leftrightarrow y$ se $x \to y \wedge y \to x$.

- OSS: dalla definizione sono equivalenti:

(1) $x \to y$.

(2) $\exists n \geq 2 \ \exists z_2, \dots, z_{n-1} \in S$ tali che $p_{xz_2} p_{z_2 z_3} \cdots p_{z_{n-1} y} > 0$.

(3) $(P^n)_{xy} > 0$ per qualche $n > 0$.

(4) $f_{xy} > 0$.

Inoltre la comunicazione "$\leftrightarrow$" è relazione di equivalenza.

Queste relazioni permettono di individuare in S:

DEF. Insieme Chiuso / Irriducibile

Sia $C \subseteq S$ sottoinsieme degli stati. Diciamo che:

- C è CHIUSO se dati $x \in C$ e $y \in S$
  "$\exists\, n \geq 0 \quad \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] > 0$" $\Rightarrow$ $y \in C$.
- C è IRRIDUCIBILE se $\forall\, x, y \in C \quad x \leftrightarrow y$.

OSS: vale che

$C \subseteq S$ chiuso $\Leftrightarrow$ "$x \in C \wedge p_{xy} > 0 \Rightarrow y \in C$".

PROPOSIZIONE

(1) Sia C classe di equivalenza per la comunicazione. Allora i suoi stati saranno tutti ricorrenti o tutti transienti.

(2) Sia C una classe ricorrente, allora C è chiusa.

TEOREMA Decomposizione

Data una catena di Markov omogenea su S, esiste una decomposizione $S = T \cup \bigcup_i C_i$

dove T sono gli stati transienti e $\{C_i\}_i$ classi irriducibili, chiuse e ricorrenti.

OSS: ogni classe chiusa e finita è ricorrente.

Studiamo allora le sole classi irriducibili...

- **OSS:** data $(X_n)_n$ catena di Markov omogenea con P matrice di transizione, lo studio asintotico della catena si può ottenere con μP^n con $n \to \infty$ dove μ è la legge iniziale.

Questo motiva il seguente concetto:

▸ **DEF. Misura Invariante**

Sia S spazio degli stati e $(X_n)_n$ catena di Markov omogenea con P matrice di transizione. Una misura μ su S si dice INVARIANTE (o STAZIONARIA) se $\mu P = \mu$.

- **OSS:** se μ è misura di probabilità e legge di X_0, allora le X_n avranno legge μ a loro volta.

- **OSS:** combinazioni lineari di misure invarianti sono ancora delle misure invarianti.

▸ **PROPOSIZIONE**

Se S insieme degli stati è finito, allora esiste almeno una legge (i.e. misura di probabilità) invariante ed esiste almeno uno stato ricorrente.

▸ **DEF. Tempo tra 2 Visite**

Siano $x, y \in S$. Il TEMPO TRA DUE VISITE è

$$\gamma_x^y := \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T_y - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = x\}} \,\middle|\, X_0 = y \right].$$

Si dimostrano le seguenti proprietà:

PROPOSIZIONE

Sia $(X_n)_n$ catena omogenea e $\mathbb{P}$ matrice di transizione irriducibile e ricorrente. Sia $y \in S$, allora:

- $\gamma_y^y = 1$.
- $\gamma^y := (\gamma_x^y)_{x \in S}$ è una misura invariante.
- $\gamma_x^y > 0$ ed è finito $\forall x \in S$.

PROPOSIZIONE

Sia $(X_n)_n$ catena omogenea, $\mathbb{P}$ irriducibile e π misura invariante con $\pi_y = 1$ per un certo $y \in S$. Allora $\pi \geq \gamma^y$.

Se la catena $(X_n)_n$ è ricorrente, allora $\pi = \gamma^y$.

- OSS: il secondo risultato dice che, a meno di multipli, esiste un' unica misura invariante.

Si può ulteriormente specializzare la definizione di ricorrente...

DEF. Ricorrente Positivo / Nullo

Sia $x \in S$, diciamo che:

- x è RICORRENTE POSITIVO se $\mathbb{E}[T_x \mid X_0 = x] < \infty$.
- x è RICORRENTE NULLO se $\mathbb{E}[T_x \mid X_0 = x] = \infty$.

TEOREMA

Supponiamo che $(X_n)_{n \geq 0}$ sia irriducibile. Sono equivalenti:

(1) ogni stato è ricorrente positivo.

(2) esiste uno stato ricorrente positivo.

(3) esiste una legge invariante.

DEF. Periodo di uno Stato

Sia $x \in S$. Definiamo il suo PERIODO come

$$p(x) := MCD\{ n \geq 0 \mid p_{xx}(n) \geq 0 \}.$$

Uno stato $x \in S$ si dice APERIODICO se $p(x) = 1$.

LEMMA

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ irriducibile e $x \in S$ stato aperiodico. Allora

$$\forall\, y,z \in S \qquad P_{yz}(n) > 0 \quad \forall\, n \text{ abbastanza grande}.$$

In altre parole, tutti gli stati sono aperiodici.

LEMMA

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ irriducibile e ricorrente. Allora:

$$\mathbb{P}[T_y < \infty] = 1 \qquad \forall\, y \in S.$$

TEOREMA

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ irriducibile aperiodica tale che esiste una legge invariante π. Allora:

$$\mathbb{P}[X_n = x] \xrightarrow{n \to \infty} \pi_x \qquad \forall\, x \in S.$$

Distribuzioni Notevoli

Distribuzione	Densità	Funzione Caratteristica
Bernoulli	$p\,\mathbb{1}_{\{x=1\}} + (1-p)\,\mathbb{1}_{\{x=0\}}$	$(1-p) + pe^{it}$
Binomiale	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\left((1-p) + pe^{it}\right)^n$
Geometrica	$p(1-p)^{k-1}$	$\dfrac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Poisson	$\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Gaussiana	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$	$\exp\left(imt - \dfrac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
Esponenziale	$\lambda e^{-\lambda x}\,\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$
Uniforme	$\dfrac{1}{b-a}\,\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\dfrac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$
Cauchy	$\dfrac{\gamma}{\pi(x-x_0)^2 + \pi\gamma^2}$	$e^{ix_0 t - \gamma\lvert t\rvert}$