FATTERELLARIO di PROBABILITÀ

2024 - 2025

scritto da ALESSIO SGUBIN
sulle lezioni di MARCO ROMITO e MARIO MAURELLI

Distribuzioni Notevoli

Distribuzione	Densità	Funzione caratteristica
Bernoulli	$p\mathbb{1}_{\{x=1\}} + (1-p)\mathbb{1}_{\{x=0\}}$	$(1-p) + pe^{it}$
Binomiale	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$((1-p) + pe^{it})^n$
Geometrica	$p(1-p)^{k-1}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
Poisson	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
Gaussiana	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$	$\exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
Esponenziale	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$	$\frac{\lambda}{\lambda - it}$
Uniforme	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{e^{ibt} - e^{iat}}{i(b-a)t}$
Cauchy	$\frac{\gamma}{\pi(x-x_0)^2 + \pi\gamma^2}$	$e^{ix_0 t - \gamma\|t\|}$

Teoria della Misura

DEF. σ-algebra / π-sistema / classe monotona

Sia Ω un insieme.

- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è una σ-ALGEBRA se:
  - i) $\Omega \in \mathcal{A}$.
  - ii) $\mathcal{A}$ chiuso per complementare.
  - iii) $\mathcal{A}$ chiuso per unioni numerabili.
- $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è un π-SISTEMA se:
  - i) $\Omega \in \mathcal{J}$.
  - ii) $\mathcal{J}$ chiuso per intersezioni finite.
- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ è una CLASSE MONOTONA se:
  - i) $\Omega \in \mathcal{M}$.
  - ii) $A, B \in \mathcal{M}$ con $A \subset B$ implica $B \setminus A \in \mathcal{M}$.
  - iii) dati $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$ con $A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n$ vale $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

TEOREMA Caratheodory

Sia $\mathcal{A}$ un'algebra su un insieme Ω e sia $\mathbb{P}_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ funzione positiva e σ-additiva con $\mathbb{P}_0(\Omega) = 1$.
Allora esiste un'unica misura di probabilità $\mathbb{P}$ su $\sigma(\mathcal{A})$ che estende $\mathbb{P}_0$.

TEOREMA della Classe Monotona

Sia $\mathcal{J}$ un π-sistema, la classe monotona generata da $\mathcal{J}$ (la minima classe monotona $\supseteq \mathcal{J}$) è una σ-algebra.

Corollario

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ ed $\mathcal{J}$ un π-sistema che genera $\mathcal{F}$.
Se $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ probabilità su $(\Omega, \mathcal{F})$ con $\mathbb{P}_1|_{\mathcal{J}} \equiv \mathbb{P}_2|_{\mathcal{J}}$ allora $\mathbb{P}_1 \equiv \mathbb{P}_2$.

Si ottiene una versione funzionale del Teorema della Classe Monotona.

LEMMA

Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile positiva. Allora esiste $(f_n)_{n \geq 1}$ successione di funzioni misurabili tale che $f_n \uparrow f$.

TEOREMA della Classe Monotona (v. funzionale)

Sia $(\Omega, \mathcal{F})$ ed $\mathcal{J}$ un π-sistema che genera $\mathcal{F}$.

Sia $\mathcal{H}$ insieme di funzioni misurabili reali su $(\Omega, \mathcal{F})$ tale che:

(i) $\mathbb{1}_A \in \mathcal{H} \quad \forall A \in \mathcal{J}$.

(ii) $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale.

(iii) se $(f_n)_n \subseteq \mathcal{H}$ con f_n positive e $f_n \uparrow f$ limitata, allora $f \in \mathcal{H}$.

Allora $\mathcal{H}$ contiene tutte le funzioni misurabili limitate.

Definiamo anche il completamento di una σ-algebra rispetto a $\mathbb{P}$...

DEF. $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità. Definiamo

$$\mathcal{N} := \{ A \subseteq \Omega \mid \exists N \in \mathcal{F},\ A \subseteq N \text{ e } \mathbb{P}(N) = 0 \}$$

e allora $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} := \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$.

TEOREMA

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità. Valgono i seguenti fatti:

(i) $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} = \{ A \subset \Omega \mid B \subset A \subset C \text{ con } B, C \in \mathcal{F} \text{ e } \mathbb{P}(C \setminus B) = 0 \}$.

(ii) $\mathbb{P}$ si estende in modo unico ad una probabilità su $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$.

DEF. Periodo di uno Stato

Sia $x \in S$. Definiamo il suo PERIODO come

$$p(x) := \text{MCD}\{ n \geq 0 \mid p_{xx}(n) > 0 \}.$$

Uno stato $x \in S$ si dice APERIODICO se $p(x) = 1$.

LEMMA

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ irriducibile e $x \in S$ stato aperiodico. Allora

$$\forall y, z \in S \qquad P_{yz}(n) > 0 \quad \forall n \text{ abbastanza grande.}$$

In altre parole, tutti gli stati sono aperiodici.

LEMMA

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ irriducibile e ricorrente. Allora:

$$\mathbb{P}[T_y < \infty] = 1 \qquad \forall y \in S.$$

TEOREMA

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ irriducibile aperiodica tale che esiste una legge invariante π. Allora:

$$\mathbb{P}[X_n = x] \xrightarrow{n \to \infty} \pi_x \qquad \forall x \in S.$$

PROPOSIZIONE

Sia $(X_n)_n$ catena omogenea e $\mathcal{P}$ matrice di transizione irriducibile e ricorrente. Sia $y \in S$, allora:

- $\gamma_y^y = 1$.
- $\gamma^y := (\gamma_x^y)_{x \in S}$ è una misura invariante.
- $\gamma_x^y > 0$ ed è finito $\forall x \in S$.

PROPOSIZIONE

Sia $(X_n)_n$ catena omogenea, $\mathcal{P}$ irriducibile e π misura invariante con $\pi_y = 1$ per un certo $y \in S$. Allora $\pi \geq \gamma^y$.

Se la catena $(X_n)_n$ è ricorrente, allora $\pi = \gamma^y$.

• OSS: il secondo risultato dice che, a meno di multipli, esiste un'unica misura invariante.

Si può ulteriormente specializzare la definizione di ricorrente ...

DEF. Ricorrente Positivo / Nullo

Sia $x \in S$, diciamo che:

- x è RICORRENTE POSITIVO se $\mathbb{E}[T_x \mid X_0 = x] < \infty$.
- x è RICORRENTE NULLO se $\mathbb{E}[T_x \mid X_0 = x] = \infty$.

TEOREMA

Supponiamo che $(X_n)_{n \geq 0}$ sia irriducibile. Sono equivalenti:

(1) ogni stato è ricorrente positivo.

(2) esiste uno stato ricorrente positivo.

(3) esiste una legge invariante.

COSTRUZIONE di SPAZI di PROBABILITÀ

ALGEBRA dei CILINDRI

Siano $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$ spazi di misura con $(\mu_i)_{i \in I}$ misure.

Vorremmo costruire μ misura di probabilità per tutti $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i \in I}$.

Consideriamo come insieme il prodotto $E := \bigotimes_{i \in I} E_i$.

Si definisce l'ALGEBRA dei CILINDRI come

$$\mathcal{C} := \{ \pi_J^{-1}(A) : J \subseteq I \text{ finito e } A \in \bigotimes_{i \in J} \mathcal{E}_i \}$$

dove la mappa è $\pi_J : E \longrightarrow \bigotimes_{i \in J} E_i$ proiezione.

Definiamo così la funzione $\mathcal{P} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ come

$$\mathcal{P}(\pi_J(A)) := \Big(\bigotimes_{i \in J} \mu_i \Big)(A)$$

su cui possiamo applicare il Teorema di Caratheodory: esiste una unica $\mathbb{P}$ misura di probabilità su $(E, \sigma(\mathcal{C}))$ che estende $\mathcal{P}$.

Usando questa costruzione, prese $X_i = \pi_{\{i\}}$, X_i ha legge μ_i.

COMPLETAMENTO di $\mathcal{F}$ rispetto a $\mathbb{P}$

Consideriamo per $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\mathcal{N} := \{ A \subseteq \Omega \mid \exists N \in \mathcal{F},\ A \subseteq N \text{ e } \mathbb{P}(N) = 0 \}.$$

Definiamo $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$.

TEOREMA

Valgono i seguenti fatti:

- $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} := \{ A \subset \Omega \mid \exists B, C \in \mathcal{F},\ B \subseteq A \subseteq C \text{ e } \mathbb{P}(C \setminus B) = 0 \}$.
- $\mathbb{P}$ si estende in modo unico ad una probabilità su $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$.

Ci interessa però estendere la costruzione con l'algebra dei cilindri oltre al caso di sole variabili aleatorie indipendenti.

Per fare questo...

DEF. Kernel di Probabilità

Siano $(E_1, \mathcal{E}_1)$ e $(E_2, \mathcal{E}_2)$ spazi di misura. Un KERNEL è

$$k : E_1 \times \mathcal{E}_2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

tale che:

- per ogni $B \in \mathcal{E}_2$ la mappa $x \mapsto k(x,B)$ è misurabile.
- per ogni $x \in E_1$, $k(x,\cdot)$ è misura di probabilità.

DEF. Composizione di Kernel

Siano $(E_i, \mathcal{E}_i)_{i=1,2,3}$ spazi di misura e consideriamo due kernel

$$k_1 : E_1 \times \mathcal{E}_2 \to \mathbb{R} \qquad k_2 : (E_1 \times E_2) \times \mathcal{E}_3 \to \mathbb{R}$$

allora la COMPOSIZIONE $k_1 \otimes k_2$ sarà un nuovo kernel

$$k_1 \otimes k_2 : E_1 \times (\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3) \longrightarrow \mathbb{R}$$

definita come

$$(k_1 \otimes k_2)(x, B) := \int_{E_2} \left(\int_{E_3} \mathbb{1}_B(y,z) \cdot k_2((x,y), dz) \right) k_1(x, dy).$$

TEOREMA Ionescu - Tulcea

Dati $(E_n, \mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spazi di misura, sia k_n kernel della forma

$$\begin{cases} k_n : \prod_{j=1}^{n-1} E_j \times \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathbb{R} & \text{per } n \geq 1 \\ k_0 \ \text{misura su } (E_0, \mathcal{E}_0) & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Allora esiste un'unica misura di probabilità su $\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} E_n, \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n \right)$, diciamo $\mathbb{P}$, tale che tramite le proiezioni $(\pi_{\{0,1,\dots,n\}})_\# \mathbb{P} = \bigotimes_{i=0}^{n} k_i$.

Studiamo allora le sole classi irriducibili...

- OSS: data $(X_n)_n$ catena di Markov omogenea con $\mathbb{P}$ matrice di transizione, lo studio asintotico della catena si può ottenere con $\mu \mathbb{P}^n$ con $n \to \infty$ dove μ è la legge iniziale.

Questo motiva il seguente concetto:

DEF. Misura Invariante

Sia S spazio degli stati e $(X_n)_n$ catena di Markov omogenea con $\mathbb{P}$ matrice di transizione. Una misura μ su S si dice INVARIANTE (o STAZIONARIA) se $\mu \mathbb{P} = \mu$.

- OSS: se μ è misura di probabilità e legge di X_0, allora le X_n avranno legge μ a loro volta.
- OSS: combinazioni lineari di misure invarianti sono ancora delle misure invarianti.

PROPOSIZIONE

Se S insieme degli stati è finito, allora esiste almeno una legge (i.e. misura di probabilità) invariante ed esiste almeno uno stato ricorrente.

DEF. Tempo tra 2 Visite

Siano $x, y \in S$. Il TEMPO TRA DUE VISITE è

$$\gamma_x^y := \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{T_y - 1} \mathbb{1}_{\{X_n = 0\}} \,\middle|\, X_0 = y \right].$$

Si dimostrano le seguenti proprietà:

(3) $(\mathbb{P}^n)_{xy} > 0$ per qualche $n > 0$.

(4) $f_{xy} > 0$.

Inoltre la comunicazione "$\leftrightarrow$" e' relazione di equivalenza.

Queste relazioni permettono di individuare in S:

DEF. Insieme Chiuso / Irriducibile

Sia $C \subseteq S$ sottoinsieme degli stati. Diciamo che:

- C e' CHIUSO se dati $x \in C$ e $y \in S$
  "$\exists n \geq 0 \ \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x] > 0$" $\Rightarrow$ $y \in C$.
- C e' IRRIDUCIBILE se $\forall x, y \in C$ $x \leftrightarrow y$.

OSS: vale che

$C \subseteq S$ chiuso $\Leftrightarrow$ "$x \in C \wedge p_{xy} > 0 \Rightarrow y \in C$".

PROPOSIZIONE

(1) Sia C classe di equivalenza per la comunicazione. Allora i suoi stati saranno tutti ricorrenti o tutti transienti.

(2) Sia C una classe ricorrente, allora C e' chiusa.

TEOREMA Decomposizione

Data una catena di Markov omogenea su S, esiste una decomposizione $S = T \cup \bigcup_i C_i$
dove T sono gli stati transienti e $\{C_i\}_i$ classi irriducibili, chiuse e ricorrenti.

OSS: ogni classe chiusa e finita e' ricorrente.

VARIABILI ALEATORIE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità ed $(E, \mathcal{E})$.

Una VARIABILE ALEATORIA e' $X : \Omega \to E$ misurabile.

Possiamo definire la sua legge...

DEF. Legge di X v.a.

La LEGGE di $X : \Omega \to E$ variabile aleatoria e'

$$\mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}[X^{-1}(A)] =: X_\# \mathbb{P}(A).$$

... e la σ-algebra associata.

DEF. $\sigma(X)$

Definiamo $\sigma(X) := \{X^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{E}\}$, che e' la più piccola σ-algebra su Ω che rende X misurabile.

LEMMA di Doob

Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(E, \mathcal{E})$ con $X : \Omega \to E$, $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variabili aleatorie con Y $\sigma(X)$-misurabile.

Allora esiste $g : E \to \mathbb{R}$ misurabile tale che $Y = g(X)$.

Indipendenza

DEF. Eventi / Variabili Indipendenti

Una famiglia $(A_i)_{i\in I}$ arbitraria di eventi è INDIPENDENTE se:

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i\in J} A_i\right] = \prod_{i\in J} \mathbb{P}[A_i] \quad \forall\, J \subseteq I \text{ finito.}$$

Le variabili $(X_i)_{i\in I}$ sono INDIPENDENTI se

$(X_i)_{i\in J}$ sono indipendenti $\forall\, J \subseteq I$ finito.

DEF. σ-algebre indipendenti

Dato $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ delle σ-algebre $\mathcal{G}_i \subseteq \mathcal{F}$ per $i \in J$ finito sono INDIPENDENTI se:

$\forall\, A_i \in \mathcal{G}_i \ \forall i \in J \qquad (A_i)_{i\in J}$ sono indipendenti.

Data allora $(\mathcal{G}_i)_{i\in I}$ σ-algebre in $\mathcal{F}$ con I generico, sono INDIPENDENTI se $(\mathcal{G}_i)_{i\in J}$ indipendenti $\forall\, J \subseteq I$ finito.

LEMMA Indipendenza su π-sistemi

Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ed $(E_1,\mathcal{E}_1),(E_2,\mathcal{E}_2)$ con $X_1:\Omega\to E_1$, $X_2:\Omega\to E_2$.

Dati $\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2$ π-sistemi che generano $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ allora:

X_1,X_2 indipendenti $\iff \mathbb{P}[X_1\in A_1, X_2\in A_2] = \mathbb{P}[X_1\in A_1]\,\mathbb{P}[X_2\in A_2]$

$\forall\, A_1 \in \mathcal{J}_1,\ A_2 \in \mathcal{J}_2.$

PROPOSIZIONE

Sia $x \in S$, valgono le caratterizzazioni:

(i) $x \in S$ ricorrente $\iff \mathbb{E}[N_x \mid X_0 = x] = +\infty$.

(ii) $x \in S$ ricorrente $\iff \mathbb{P}[N_x = \infty \mid X_0 = x] = 1$.

LEMMA

Siano $x,y \in S$, poniamo $p_{xy}(n) := \mathbb{P}[X_n = y \mid X_0 = x]$ e

$$\begin{cases} P_{x,y}(t) := \sum_{n\geq 0} p_{xy}(n)\, t^n & \text{dove } p_{xy}(0) = \delta_{xy}. \\ F_{x,y}(t) := \sum_{n\geq 0} f_{xy}(n)\, t^n & \text{dove } f_{xx}(0) = 0. \end{cases}$$

Allora nell'insieme di convergenza $|t|<1$ troviamo:

$$P_{xy}(t) = p_{xy}(0) + F_{xy}(t)P_{yy}(t)$$

e in particolare ne segue che:

$$P_{xx}(t) = 1 + F_{xx}(t)P_{xx}(t).$$

Vogliamo studiare più nel particolare come interagiscono gli stati tra di loro:

DEF. Comunicazione

Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ e $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea su S.

Dati $x,y \in S$, si dice che

- x CONDUCE a y: $x \to y$ se $\mathbb{P}[\exists n\geq 0\ X_n = y \mid X_0 = x] > 0$.
- x e y COMUNICANO: $x \leftrightarrow y$ se $x \to y \wedge y \to x$.

- OSS: dalla definizione sono equivalenti:

(1) $x \to y$.

(2) $\exists n\geq 2\ \exists z_2,\dots,z_{n-1} \in S$ tali che $p_{xz_2}\,p_{z_2z_3}\cdots p_{z_{n-1}y} > 0$.

Catene di Markov: Comportamento Asintotico

Lo studio asintotico si basa sulla definizione di...

DEF. Stato Ricorrente / Transiente

Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ed S spazio degli stati. Data $(X_n)_n$ catena omogenea:

- $x \in S$ è RICORRENTE se $\mathbb{P}[\exists\, n \geq 1 \ X_n = x \mid X_0 = x] = 1$.
- $x \in S$ è TRANSIENTE se $\mathbb{P}[\exists\, n \geq 1 \ X_n = x \mid X_0 = x] < 1$.

DEF. Tempo di Primo Passaggio / Arrivo

Sia $x \in S$, poniamo:

- $T_x := \inf\{n \geq 1 \mid X_n = x\}$ TEMPO DI PRIMO PASSAGGIO
- $U_x := \inf\{n \geq 0 \mid X_n = x\}$ TEMPO DI PRIMO ARRIVO.

Dati $x,y \in S$ si definiscono:

- $f_{xy}(n) := \mathbb{P}[T_x = n \mid X_0 = y]$
- $f_{xy} := \sum_{n \geq 0} f_{xy}(n)$.

- **OSS:** segue dalle definizioni che

$$x \in S \text{ ricorrente} \iff \mathbb{P}[T_x < \infty \mid X_0 = x] = 1 \iff f_{xx} = 1$$

$$x \in S \text{ transiente} \iff \mathbb{P}[T_x < \infty \mid X_0 = x] < 1.$$

DEF. Numero di Visite

Sia $x \in S$. Definiamo il NUMERO DI VISITE:

$$N_x = \mathrm{card}\{n \geq 0 \mid X_n = x\}.$$

Indipendenza: Risultati Asintotici

DEF. σ-algebra coda

Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di v.a. indipendenti.

Definiamo la σ-ALGEBRA CODA di $(X_n)_n$ ponendo prima

$$\mathcal{F}^n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots) \quad \forall\, n \geq 1$$

e allora $\mathcal{F}^\infty := \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}^n$ è la σ-algebra coda.

TEOREMA Legge 0,1 di Kolmogorov

Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di v.a. indipendenti.

Allora la σ-algebra coda $\mathcal{F}^\infty$ è banale, cioè:

$$\forall\, A \in \mathcal{F}^\infty \quad \mathbb{P}[A] \in \{0,1\}.$$

DEF. limsup / liminf di eventi

Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ e $(A_n)_n \subset \mathcal{F}$. Definiamo:

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \text{definitivamente } \omega \in A_n\}$$

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \text{frequentemente } \omega \in A_n\}.$$

LEMMA 1° Borel-Cantelli:

Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ed $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$. Vale che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] < \infty \implies \mathbb{P}[\limsup A_n] = 0.$$

LEMMA 2° Borel-Cantelli:

Sia $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ed $(A_n)_{n\geq 1}$ a due a due indipendenti. Vale che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n] = \infty \implies \mathbb{P}[\limsup A_n] = 1.$$

PROPOSIZIONE Proprietà liminf/limsup

(1) $\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf_n (\mathbb{1}_{A_n})$, $\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n (\mathbb{1}_{A_n})$.

(2) $\left(\limsup_n A_n\right)^c = \liminf_n A_n^c$

(3) $\mathbb{P}\left[\liminf_n A_n\right] \leq \liminf_n \mathbb{P}[A_n]$

$\limsup_n \mathbb{P}[A_n] \leq \mathbb{P}\left[\limsup_n A_n\right]$

(4) $\limsup A_n = \left\{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) < \infty\right\}$.

FATTO Inclusioni Utili

Siano (X_n) v.a. reali e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $\forall \varepsilon > 0$:

$$\limsup_n \{X_n < \lambda - \varepsilon\} \subseteq \{\liminf_n X_n < \lambda\} \subseteq \limsup_n \{X_n < \lambda\}.$$

Catene di Markov : Tempo di Arrivo

Vediamo come formalizzare il tempo di arrivo in uno stato...

DEF. Tempo di Arrivo

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed S spazio di stati, $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea ed $A \subseteq S$ sottoinsieme. Il suo TEMPO di ARRIVO e'

$$U_A := \inf(\{n \geq 0 \mid X_n \in A\} \cup \{+\infty\}).$$

Poniamo inoltre le quantità:

$$a_{A,x} := \mathbb{P}[U_A < \infty \mid X_0 = x] \quad \text{e} \quad m_{A,x} := \mathbb{E}[U_A \mid X_0 = x].$$

Il seguente risultato caratterizza queste quantità...

TEOREMA

La famiglia $(a_{A,x})_{x\in S}$ e' la minima soluzione del sistema:

$$\begin{cases} a_x = 1 & \text{se } x \in A \\ a_x = \sum_{y\in S} p_{x,y}\, a_y & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Per soluzione "minima" si intende che $\forall (a_x)_{x\in S}$ soluzione vale:

$$a_x \geq a_{A,x} \quad \forall x \in S.$$

La famiglia $(m_{A,x})_{x\in S}$ e' la minima soluzione del sistema:

$$\begin{cases} m_x = 0 & \text{se } x \in A \\ m_x = 1 + \sum_{y\notin A} p_{xy}\, m_y & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

DEF. Catena Omogenea

Una catena $(X_n)_{n\geq 0}$ è OMOGENEA se come funzione in $x,y \in S$

$\mathbb{P}[X_{n+1}=y \mid X_n = x] = p^n_{xy}$ non dipende da $n \geq 0$.

- OSS: fissato $x \in S$, la probabilità $\mathbb{P}[X_{n+1}=x \mid X_n]$ dipende da n, ma soltanto tramite la v.a. X_n.

  Se fissiamo il valore di X_n allora non dipende più da n.

- OSS: data $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea, la legge di X_n sarà data da $Q \cdot P^n$.

  Segue che nel caso omogeneo $P^{n+m} = P^n \cdot P^m$.

PROPOSIZIONE Formula di Chapman-Kolmogorov

Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov omogenea. Allora $\forall m,n,r > 0$ $\forall x,z \in S$:

$$\mathbb{P}[X_{n+m+r}=z \mid X_m = x] = \sum_{y \in S} \mathbb{P}[X_{n+m+r}=z \mid X_{n+m}=y] \cdot \mathbb{P}[X_{n+m}=y \mid X_n = x].$$

FUNZIONE CARATTERISTICA

DEF. Funzione Caratteristica

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $X: \Omega \to \mathbb{R}^d$ v.a.

La FUNZIONE CARATTERISTICA di X è $\varphi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ data da

$$\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{it \cdot X}] = \int e^{it\cdot X(\omega)} \mathbb{P}(d\omega) \overset{!}{=} \int e^{it \cdot x} \mathbb{P}_X(dx).$$

$\Vert\!\!\rightarrow$ φ_X dipende solo dalla legge di X

PROPRIETÀ ELEMENTARI

- $\varphi_X(0) = 1$ e $|\varphi_X(t)| \leq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$.
- Se $A \in \mathbb{R}^{d \times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ allora $\varphi_{AX+b}(t) = e^{it\cdot b} \varphi_X(A^t \cdot t)$.
- φ_X è uniformemente continua.
- Se X, Y sono indipendenti allora $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$.

FATTO Regolarità di φ_X

Siano $X: \Omega \to \mathbb{R}^d$ con $X = (X_1, \dots, X_d)$ e $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che $\mathbb{E}[|X_1|^{a_1} \cdot \ldots \cdot |X_d|^{a_d}] < \infty$ e allora esiste

$$\partial^{a_1}_{t_1} \dots \partial^{a_d}_{t_d} \varphi_X(t) = i^{a_1 + \dots + a_d} \mathbb{E}[X_1^{a_1} \dots X_d^{a_d} e^{it\cdot X}].$$

FATTO Integrali & Misure immagine

Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $X: \Omega \to \mathbb{R}$ di legge $\mathbb{P}_X$ e sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ misurabile, allora $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{P}_X(dx)$.

Vogliamo ora vedere che φ_X identifica univocamente la legge della variabile aleatoria ...

LEMMA Densità di X+Y

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed X, Y v.a. indipendenti. Sia f_Y densità di Y, allora $X+Y$ avrà densità $z \longmapsto \mathbb{E}[f_Y(z-X)]$.

Corollario

Sia X v.a. reale e Z Gaussiana standard indipendente da X:

- la densità g_ε di $X+\sqrt{\varepsilon}$ è continua e limitata.
- se X ha densità f continua limitata allora

$$g_\varepsilon \leq \sup f \quad \text{e} \quad g_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} f \text{ uniformemente.}$$

TEOREMA Identità di Parseval

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed X v.a. reale con densità f continua limitata. Allora:

$$\int |\varphi_X(t)|^2 \, dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx .$$

Corollario Formula di Inversione

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed X v.a. reale tale che φ_X sia integrabile. Allora X ha densità continua e limitata

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(t) e^{-itx} \, dt .$$

Si ottiene che φ_X e $\mathbb{P}_X$ danno le stesse informazioni...

TEOREMA φ_X caratterizza $\mathbb{P}_X$

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e X, Y variabili aleatorie su $\mathbb{R}^d$.

Se $\varphi_X \equiv \varphi_Y$ allora X, Y hanno la stessa legge.

- OSS: legge iniziale e probabilità di transizione identificano una catena di Markov univocamente.

DEF. Matrice Stocastica

Definiamo i seguenti oggetti:

$$\begin{cases} Q := (q_x)_{x \in S} \\ P^n := (p^n_{xy})_{x,y \in S} \quad \text{per } n \geq 0 \end{cases} \qquad \text{MATRICE STOCASTICA.}$$

OSS. Per definizione $\sum_{x \in S} q_x = 1$ e $\sum_{y \in S} p^n_{xy} = 1$.

Si può definire la moltiplicazione:

$$(P^n P^{n+1})_{x,y} := \sum_{z \in S} P^n_{xz} P^{n+1}_{zy} .$$

Corollario

Se $(X_n)_{n \geq 0}$ è catena di Markov allora:

$$\mathbb{P}[X_n = x_n] = \sum_{x_0, \dots, x_{n-1} \in S} q_{x_0} p^0_{x_0 x_1} - p^{n-1}_{x_{n-1} x_n} = (Q P^0 \_ P^{n-1})_{x_n} .$$

TEOREMA

Consideriamo $(X_n)_n$ successione di variabili aleatorie:

$(X_n)_{n \geq 0}$ catena di Markov $\Leftrightarrow$ $\forall n > 0$ il "passato" e il "futuro" sono indipendenti da X_n.

Più precisamente $\forall n \geq 1$ $\forall x \in S$ fissiamo $X_n = x$. Allora:

$(X_{n+m})_{m \geq 0}$ è catena di Markov indipendente da $(X_0, \dots, X_{n-1})$.

Ci mettiamo ora in un setting speciale, dove le probabilità di transizione non dipendono più dal "tempo" n...

Catene di Markov

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità ed S insieme di stati ($\# \leq \aleph_0$).

Siano $(X_n)_{n\geq 0}$ variabili aleatorie a valori in S.

DEF. Filtrazione

Una FILTRAZIONE su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e' una successione crescente di σ-algebre contenute in $\mathcal{F}$.

DEF. Catena di Markov

La successione $(X_n)_{n\geq 0}$ e' CATENA di MARKOV se, posta $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ filtrazione, vale che

$$\forall n \geq 0 \quad \forall x \in S \qquad \mathbb{P}[X_{n+1} = x \mid \mathcal{F}] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x \mid X_n].$$

Vale la seguente caratterizzazione:

TEOREMA

La successione $(X_n)_{n\geq 0}$ e' catena di Markov se e solo se "$\forall x_0, \dots, x_{n+1} \in S$ tali che $\mathbb{P}[X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] > 0$

vale che $\mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n]$".

TEOREMA

Data la successione $(X_n)_{n\geq 0}$, poniamo:

- la LEGGE INIZIALE $\quad q_x = \mathbb{P}[X_0 = x]$
- la PROBABILITA' di TRANSIZIONE $\quad p^n_{xy} = \mathbb{P}[X_{n+1} = y \mid X_n = x]$

per ogni $x, y \in S$ ed $n \geq 0$. Allora vale che

$(X_n)_{n\geq 0}$ catena di Markov $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}[X_0 = x, \dots, X_n = x_n] = q_{x_0} p^0_{x_0 x_1} \cdots p^{n-1}_{x_{n-1} x_n}$.

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed X, Y variabili aleatorie tali che

$$\begin{cases} \mathbb{E}X^n = \mathbb{E}Y^n < \infty & \forall n \geq 1 \\ \mathbb{E}|X|^n, \mathbb{E}|Y|^n \leq \frac{n!}{r} \cdot M \end{cases}$$

allora $\varphi_X \equiv \varphi_Y$. In particolare hanno la stessa legge.

TEOREMA Indipendenza e φ_X

X, Y indipendenti $\Leftrightarrow$ $\varphi_{(X,Y)}(s,t) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t) \quad \forall s,t$.

DEF. Funzione Generatrice

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e X v.a. reale. La FUNZIONE GENERATRICE dei MOMENTI sarà $\Psi_X(t) := \mathbb{E}[e^{t \cdot X}]$.

Il suo dominio sarà $\{t \in \mathbb{R} \mid \mathbb{E}[e^{tX}] < \infty\}$.

PROPOSIZIONE

Sia Ψ_X definita in un intorno di 0. Allora:

1) X ha momenti di ogni ordine.
2) Ψ_X e' analitica in un intorno di 0.
3) esistono $M, r \geq 0$ tali che $\mathbb{E}|X|^n \leq M \frac{n!}{r}$.
4) se $\Psi_X = \Psi_Y$ allora X, Y hanno la stessa legge.

FATTO

X, Y indipendenti $\Leftrightarrow$ $\Psi_{(X,Y)}(s,t) = \Psi_X(s) \cdot \Psi_Y(t) \quad \forall s,t$.

Convergenza di Variabili Aleatorie

DEF. Convergenza in Probabilità

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$, X variabili aleatorie.

Diciamo che $X_n \longrightarrow X$ in PROBABILITÀ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}[|X - X_n| > \varepsilon] \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

DEF. Convergenza Quasi-Certamente

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$, X variabili aleatorie.

Diciamo che $X_n \longrightarrow X$ QUASI-CERTAMENTE se:

$$\mathbb{P}[\lim_n X_n = X] = 1.$$

DEF. Convergenza in Media

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$, X variabili aleatorie.

Diciamo che $X_n \longrightarrow X$ in MEDIA $\mathcal{L}^p$ se:

$$\|X - X_n\|_p \longrightarrow 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

TEOREMA Implicazioni tra Convergenze

(1) Convergenza in media $\mathcal{L}^p$ $\Rightarrow$ Convergenza in probabilità.

(2) Convergenza quasi-certamente $\Rightarrow$ Convergenza in probabilità.

(3) Convergenza in probabilità $\Rightarrow$ $\exists$ sottosuccessione convergente quasi-certamente.

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_n$, X variabili aleatorie. Sono equivalenti:

(1) $X_n \longrightarrow X$ in probabilità.

(2) ogni successione estratta da $(X_n)_n$ ha sottosucc. convergente q.c. ad X.

- $\forall y \in S_2 \quad A \longmapsto \mathbb{P}[X \in A \mid Y = y]$ è probabilità su $\mathcal{B}(S_1)$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{P}[X \in A \mid Y = y]$ dipende dalla sola legge congiunta di (X, Y).

(8) Siano $X, X\cdot Y \in L^1$ ed Y $\mathcal{F}$-misurabile. Allora

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{F}] = Y \cdot \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}].$$

(9) <u>JENSEN</u>: sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa con $X, \varphi(X) \in L^1$. Allora

$$\varphi(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X) \mid \mathcal{F}].$$

(10) Sia $p \in [1, +\infty]$ e $X \in L^p$. Allora:

$$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \in L^p \quad \text{e} \quad \| \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] \|_{L^p} \leq \| X \|_{L^p}.$$

LEMMA Freezing Lemma

Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ una σ-algebra ed X, Y variabili aleatorie su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, a valori in $\mathbb{R}^k$ ed $\mathbb{R}^h$ rispettivamente. Supponiamo che

X indipendente da $\mathcal{F}$ e Y $\mathcal{F}$-misurabile.

Data una funzione $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^h$ Boreliana limitata, definiamo

$$\forall y \in \mathbb{R}^h \quad \phi(y) := \mathbb{E}[\varphi(X, y)].$$

Segue che ϕ è Boreliana e verifica

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y) \mid \mathcal{F}] = \phi(Y).$$

Concludiamo con un risultato sulla possibilità di definire la probabilità condizionata ad un valore preciso "$Y = y$".

TEOREMA

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ spazio di probabilità, S_1, S_2 spazi polacchi. Consideriamo v.a. $X : \Omega \to S_1$ e $Y : \Omega \to S_2$ ed $A \in \mathcal{B}(S_1)$, $y \in S_2$.

$\Rightarrow \exists$ una funzione $\begin{aligned} S_2 \times \mathcal{B}(S_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, A) &\longmapsto \mathbb{P}[X \in A \mid Y = y] \end{aligned}$ tale che

- $\forall A \in \mathcal{B}(S_1) \quad \mathbb{P}[X \in A \mid Y = y] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X) \mid Y = y]$.

PROPOSIZIONE ConvDom in probabilità

Siano $X_n \to X$ in probabilità con $|X_n| \leq Y$ per $\mathbb{E}|Y| < \infty$. Allora $X_n \to X$ in media $\mathcal{L}^1$.

TEOREMA

Lo spazio $L^0 = \mathcal{L}^0 / \sim$ è completo, con $f \sim g$ se $f = g$ q.c.

Corollario

Lo spazio $L^p = \mathcal{L}^p / \sim$ è completo $\forall p \in [1, \infty)$.

Convergenza di Misure (i.e. in legge)

DEF. Convergenza Stretta / Debole / Vaga

Siano $(\mu_n)_n, \mu$ misure su $\mathbb{R}^d$. Allora:

- $\mu_n \to \mu$ STRETTAMENTE se $\int g \, d\mu_n \to \int g \, d\mu \quad \forall g \in C_b$.
- $\mu_n \to \mu$ DEBOLMENTE se $\int g \, d\mu_n \to \int g \, d\mu \quad \forall g \in C_0$.
- $\mu_n \to \mu$ VAGAMENTE se $\int g \, d\mu_n \to \int g \, d\mu \quad \forall g \in C_c$.

FATTO

Le convergenze si implicano nell' ordine:

stretta $\Rightarrow$ debole $\Rightarrow$ vaga.

PROPOSIZIONE Vaga "$\Rightarrow$" Debole

Siano $(\mu_n)_n, \mu$ misure finite su $\mathbb{R}$. Vale che:

$\mu_n \to \mu$ vaga e $\sup_n \mu_n(\mathbb{R}) < \infty \Rightarrow \mu_n \to \mu$ debole.

PROPOSIZIONE Vaga "$\Rightarrow$" Stretta

Siano $(\mu_n)_n, \mu$ misure finite su $\mathbb{R}$. Vale che:

$\mu_n \to \mu$ vaga e $\mu_n(\mathbb{R}) \to \mu(\mathbb{R}) \Rightarrow \mu_n \to \mu$ stretta.

PROPOSIZIONE Convergenze con F_μ

Siano $(\mu_n)_n$ misure di probabilità e μ misura finita su $\mathbb{R}$.

(i) $\mu_n \to \mu$ strettamente $\Rightarrow F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x) \quad \forall x$ pto continuità F_μ.

(ii) $F_{\mu_n}(x) \to F_\mu(x) \quad \forall x \in D$ denso $\Rightarrow \mu_n \to \mu$ vagamente.

Il risultato si estende in realtà ad $X \in L^1$...

TEOREMA $\exists!$ Speranza Condizionale

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ed $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebra. Data $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ esiste $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ unica quasi-certamente

LEMMA

Sia $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ variabile aleatoria:

- $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \geq 0$ quasi-certamente.
- $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A} \Rightarrow X = 0$ quasi-certamente.

PROPRIETÀ di $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$

(1) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]] = \mathbb{E}[X]$.

(2) La mappa $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ è lineare.

(3) Se $X \leq Y$ q.c. allora $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}]$ q.c.

(4) Se X è $\mathcal{F}$-misurabile allora $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = X$ q.c.

(5) Se X è indipendente da $\mathcal{F}$ allora $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$ q.c.

(6) Date $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ σ-algebre vale che

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \,\big|\, \mathcal{G}\big] = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}].$$

(7) Ci sono proprietà di convergenza analoghe:

- MONOTONA: se $X_n, X \in L^1$ con $X_n \uparrow X$ allora anche $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \uparrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.
- DOMINATA: se $X_n, X \in L^1$ con $X_n \xrightarrow{q.c.} X$ ed $|X_n| \leq Y \in L^1$, allora $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \to \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ q.c. e in L^1.
- FATOU: se $X_n \in L^1$ allora $\mathbb{E}[\underline{\lim}_n X_n | \mathcal{F}] \leq \underline{\lim}_n \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}]$.

TIPS

(1) Si usa spesso, con qualsiasi $\mathcal{F}$ vale!

Speranza Condizionale

DEF. Speranza Condizionale

Sia $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ spazio di probabilità ed $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}$ una σ-algebra.
Sia $X\in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ variabile aleatoria. La sua SPERANZA CONDIZIONALE data $\mathcal{F}$ è una variabile aleatoria $\tilde{X}$ con:

(i) $\tilde{X}$ $\mathcal{F}$-misurabile.

(ii) $\tilde{X}\in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

(iii) $\mathbb{E}[\tilde{X}\cdot\mathbb{1}_F]=\mathbb{E}[X\cdot\mathbb{1}_F]\quad\forall F\in\mathcal{F}$.

Una variabile aleatoria $\tilde{X}$ con tali proprietà si indica $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

ESEMPI

(a) Sia $\mathcal{F}$ generata da una partizione $F_1,\dots,F_n$ di Ω ($n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$):

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mathbb{P}[F_i]}\mathbb{E}[X\mathbb{1}_{F_i}]\,\mathbb{1}_{F_i}.$$

(b) Data (X,Y) assolutamente continua con $f_{(X,Y)}$ densità:

$$\mathbb{E}[X|\sigma(Y)]:=\tilde{id}(Y)$$

dove $\tilde{id}(y):=\int_{\mathbb{R}}x\,f_{X|Y}(x|y)\,dx$.

PROPOSIZIONE Interpretazione Geometrica $\exists$ in L^2

Sia $X\in L^2(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ variabile aleatoria. Fissato $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}$ σ-algebra esiste un unico $\tilde{X}\in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ che minimizza

$$\begin{aligned} L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ V &\longmapsto \mathbb{E}[|X-V|^2]. \end{aligned}$$

In particolare $\tilde{X}$ si rivela essere $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

TEOREMA Helly

Siano $(\mu_n)_n$ probabilità su $\mathbb{R}$. Esiste una sottosuccessione estratta che converge debolmente.

Un altro criterio di convergenza stretta richiede che "la massa non vada all'infinito"...

DEF. Famiglia Tesa (Tight)

Una famiglia $\mathcal{M}$ di misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$ è TESA se $\forall\varepsilon>0\ \exists K_\varepsilon\subseteq\mathbb{R}^d$ compatto tale che $\mu_n(K_\varepsilon)\geq 1-\varepsilon\ \forall n$.

TEOREMA Prokhorov

Sia $\mathcal{M}$ famiglia di misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$. Sono equivalenti:

(1) $\mathcal{M}$ è famiglia tesa.

(2) $\mathcal{M}$ è sequenzialmente relativamente compatta per convergenza stretta.

FATTO

Sia $(\mu_n)_{n\geq 1}$ tale che $c_0=\sup_n\int|x|\mu_n(dx)<\infty$.
Allora $(\mu_n)_n$ è tesa.

TEOREMA Portmanteau

Siano $(\mu_n)_{n\geq1},\mu$ misure di probabilità su $\mathbb{R}^d$. Sono equivalenti:

1) $\mu_n\to\mu$ strettamente.

2) $\mu(A)\leq\liminf_n\mu_n(A)\quad\forall A$ aperto.

3) $\limsup_n\mu_n(C)\leq\mu(C)\quad\forall C$ chiuso.

4) $\mu(B)=\lim_n\mu_n(B)\quad\forall B$ tale che $\mu(\partial B)=0$.

5) $\int f(x)\mu(dx) \le \liminf_n \int f(x)\mu_n(dx) \quad \forall f$ semicont. inferiore.

6) $\limsup_n \int f(x)\mu_n(dx) \le \int f(x)\mu(dx) \quad \forall f$ semicont. superiore.

7) $\int f(x)\mu(dx) = \lim_n \int f(x)\mu_n(dx) \quad \forall f$ con $\mu($pti disc. di $f) = 0$.

DEF. Distribuzione α-Stabile

Una variabile aleatoria Y ha distribuzione α-STABILE se dati:

$$\alpha \in [0,2] \qquad \theta \in [0,1] \qquad b > 0 \qquad c \in \mathbb{R}$$

la sua funzione caratteristica e`

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(ict - b|t|^\alpha \left(1 + i(2\theta-1)\,\mathrm{sgn}(t)\, w_\alpha(t)\right)\right)$$

dove
$$w_\alpha(t) = \begin{cases} \tan\left(\alpha \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\log(|t|) & \text{se } \alpha = 1 . \end{cases}$$

DEF. Legge Stabile

Una legge μ si dice STABILE se $\forall k \ \exists a_k, b_k \in \mathbb{R}$ tali che:
" $Y_1, \dots, Y_k$ indipendenti di legge μ " $\Rightarrow$ " $\frac{Y_1 + \dots + Y_k - b_k}{a_k}$ ha legge μ ".

Otteniamo il seguente risultato generale:

TEOREMA Leggi Stabili

Sia μ una legge. Vale che:

$$\mu \text{ e` STABILE} \iff \mu \text{ e` limite di un TLC}.$$

In particolare, le uniche leggi stabili sono le leggi α-stabili.

TEOREMA Lindeberg

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ indipendenti con $\mathbb{E}X_n = 0 \quad \forall n \geq 1$.

Poniamo $D_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k)$. Se per ogni $\varepsilon > 0$ vale che

$$\lim_n \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[X_k^2 \mathbb{1}_{\{|X_k| \geq \varepsilon D_n\}}\right] = 0$$

allora vale il TLC.

TEOREMA Berry-Esseen (velocità di convergenza)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $(X_n)_{n\geq 1}$ indipendenti con stessa distribuzione.

Supponiamo che $\mathbb{E}X_1 = 0$ e $\mathbb{E}X_1^2 = \sigma^2$ e $\mathbb{E}|X_1|^3 = \rho^3$.

Allora vale che $\quad |F_n(x) - \Phi(x)| \leq \dfrac{3\rho^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$

dove
- F_n funzione involutiva di $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$.
- Φ funzione involutiva della Gaussiana standard.

LEGGI STABILI

Il seguente risultato ci descrive possibili limiti delle somme S_n...

TEOREMA

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti identicam. distribuite tali che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}[X_1 > x]}{\mathbb{P}[|X_1| > x]} = \vartheta \in [0,1] \quad \text{e} \quad \mathbb{P}[|X_j| > x] = \frac{L(x)}{x^\alpha}$$

dove L è a VARIAZIONE LENTA cioè $\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1 \quad \forall t > 0$.

Prendiamo le quantità:

$$a_n = \inf\left\{x \mid \mathbb{P}[|X_1| > x] \leq \tfrac{1}{n}\right\} \qquad b_n = n\mathbb{E}\left[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq a_n\}}\right]$$

e allora $\dfrac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\text{legge}} Y$ che ha distribuzione α-STABILE.

vedi sotto

CONVERGENZA in LEGGE

DEF. Convergenza in Legge

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ variabili aleatorie a valori in $\mathbb{R}^d$. Diciamo che $X_n \to X$ IN LEGGE se $\mathbb{P}_{X_n} \to \mathbb{P}_X$ strettamente come misure (equiv. vagamente/debolmente per misure di probabilità).

PROPOSIZIONE Def. equivalente

$X_n \to X$ in legge $\iff \forall g \in C_b \quad \mathbb{E}[g(X_n)] \to \mathbb{E}[g(X)]$.

PROPRIETÀ ELEMENTARI

- Sia $X_n \to X$ in legge con h continua. Allora
  $h(X_n) \to h(X)$ in legge.
- Se $X_n \to X$ in probabilità, allora $X_n \to X$ in legge.
- Se $X_n \to c$ in legge con c costante, $X_n \to X$ in probabilità.

TEOREMA Convergenza e FdR

Siano $(X_n)_{n\geq 1}, X$ variabili aleatorie reali. Sono equivalenti:
- $X_n \to X$ in legge.
- $F_{X_n} \to F_X$ sui punti di continuità di F_X.
- $F_{X_n} \to F_X$ su un denso.

TEOREMA Lévy

Siano $(X_n)_{n\geq 1}, X$ v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$. Sono equivalenti:
- $X_n \to X$ in legge.
- se $\varphi_{X_n} \to \varphi$ puntualmente con φ continua in 0, $\exists X$ v.a. $\varphi = \varphi_X$.

La convergenza in legge è più debole, ma con opportune modifiche riusciamo a migliorarla...

TEOREMA Skorohod

Siano $(X_n)_{n\geq 1}, X$ variabili aleatorie con $X_n \to X$ in legge.
Allora esistono $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$ spazio di probabilità e $\tilde{X}_n, \tilde{X}$ variabili aleatorie tali che $\tilde{X}_n \overset{legge}{=} X_n$, $\tilde{X} \overset{legge}{=} X$ e $\tilde{X}_n \to \tilde{X}$ q.c.

TEOREMA TLC multidimensionale

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con stessa distribuzione, a valori in $\mathbb{R}^d$ ed $\mathbb{E}|X_1|^2 < \infty$. Allora:

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{legge} \mathcal{N}(0, Q) \qquad \text{dove } Q = Cov(X_1).$$

- **OSS.**

Siano $(X_n)_n$ Cauchy indipendenti. Allora $\frac{S_n}{n} \sim$ Cauchy ($\neq$ Gaussiana).

TEOREMA TLC (non iid)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_n$ indipendenti tali che:

- $\mathbb{E}X_n = m \in \mathbb{R} \qquad \forall n$.
- $Var(X_n) = \sigma^2 \in \mathbb{R} \qquad \forall n$.
- $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^3 < \infty$.

Allora vale il Teorema del Limite Centrale.

LEMMA 1

Siano $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n \in \mathbb{C}$ tali che $|z_i|, |w_i| \leq \theta$. Allora:

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i - \prod_{i=1}^n w_i \right| \leq \theta^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n |z_i - w_i| .$$

LEMMA 2

Per ogni $n \geq 1$ esiste un $c_n > 0$ tale che:

$$\left| e^{it} - \left(1 + it - \frac{1}{2}t^2 + \dots + \frac{(it)^n}{n!}\right) \right| \leq c_n t^{n+1} .$$

Abbiamo solo enunciato altre versioni del TLC...

PROPOSIZIONE

La media e la covarianza identificano univocamente la legge di un vettore Gaussiano, con funzione caratteristica:

$$\varphi_X(u) = e^{iu\cdot m - \frac{1}{2}u^T\cdot Qu}.$$

PROPRIETÀ Vettori Gaussiani

- TRASFORMAZIONI LINEARI: sia $X \sim N(m,Q)$ a valori in $\mathbb{R}^d$. Dati $n \in \mathbb{R}^k$ e $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$ si ottiene $n + AX \sim N(n+Am, AQA^T)$.
- ESISTENZA: siano $m \in \mathbb{R}^d$ e $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ simmetrica e semidefinita positiva. Allora esiste un vettore Gaussiano $N(m,Q)$.
- DENSITÀ: se la matrice di covarianza è non-singolare, allora il vettore Gaussiano ammette una densità:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \cdot \det Q}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T Q^{-1}(x-m)}$$

PROPOSIZIONE

Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ successione di vettori Gaussiani tali che $X_n \xrightarrow{legge} X$. Allora X è un vettore Gaussiano.

Possiamo ora enunciare il TLC...

TEOREMA TLC unidimensionale

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. reali indipendenti con la stessa distribuzione ed $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Allora

$$\frac{S_n - \mathbb{E}S_n}{\sqrt{Var(S_n)}} \xrightarrow{legge} N(0,1).$$

Si estende subito in più dimensioni...

TEOREMI LIMITE

TIPS
→ se abbiamo $\frac{\sum X_i}{n}$ ho LGN
→ se abbiamo $\frac{\sum X_i}{\sqrt{n}}$ ho TLC

LEGGE dei GRANDI NUMERI

TEOREMA LGN classico

Siano $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con stessa distribuzione.
Se $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$ allora: $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}X_1$
dove $S_n = X_1 + \_ + X_n$.

Distinguiamo due categorie distinte di LGN...

DEF. LGN Debole/Forte

Diciamo che $(X_n)_{n\geq 1}$ soddisfa la LEGGE dei GRANDI NUMERI

- DEBOLE: se $\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
- FORTE: se $\frac{1}{n}(S_n - \mathbb{E}S_n) \xrightarrow{q.c.} 0$. *suppongo $\mathbb{E}|X_n| < \infty \ \forall n$

TEOREMA LGN Debole (con $\mathbb{E}X_1$)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_n$ v.a. iid tali che $\mathbb{E}X_1 < \infty$.
Allora vale la legge dei grandi numeri debole.

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. iid tali che

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \mathbb{P}[|X_1| \geq x] = 0.$$

Dati allora $m_n := \mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{\{|X_1| \leq n\}}]$ vale che:

$$\frac{1}{n}(S_n - m_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0.$$

FATTO

Sia $X \geq 0$ e $p \geq 1$: $\quad \mathbb{E}X^p = \int_0^{+\infty} p x^{p-1}\, \mathbb{P}[X \geq x]\, dx.$

TEOREMA LGN Forte (con $\mathbb{E}X_1^4$)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. iid tali che $\mathbb{E}X_1^4 < \infty$.

Allora vale la legge dei grandi numeri forte.

TEOREMA LGN Forte (con $\sum_n \frac{1}{n^2} Var(X_n)$)

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con $\sum_n \frac{1}{n^2} Var(X_n) < \infty$.

Allora vale la legge dei grandi numeri forte.

TEOREMA LGN Forte di Kolmogorov (con $\mathbb{E}X_1$)

Siano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. iid tali che $\mathbb{E}X_1 < \infty$.

Allora vale la legge dei grandi numeri forte.

PROPOSIZIONE Disuguaglianza di Kolmogorov

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con

$$\mathbb{E}X_n = 0 \quad e \quad \mathbb{E}X_n^2 < \infty \quad \forall n \geq 1.$$

Allora $\forall \varepsilon > 0$: $\mathbb{P}\left[\max_{k=1,\dots,n} |S_k| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E}S_n^2$.

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_{n\geq 1}$ v.a. indipendenti con

$$\mathbb{E}X_n = 0 \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}X_n^2 < \infty.$$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} X_n^2$ converge quasi certamente.

LEMMA Kronecker

Sia $a_n \uparrow \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{a_n}$ convergente. Allora $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} y_n \longrightarrow 0$.

Per concludere abbiamo un ulteriore risultato...

PROPOSIZIONE

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ed $(X_n)_n$ v.a. iid. Allora:

1) se $\mathbb{E}|X_1| = +\infty \implies \mathbb{P}[\{\lim \frac{S_n}{n} \text{ esiste } < \infty\}] = 0$.

2) se $\mathbb{P}[\{\lim \frac{S_n}{n} \text{ esiste } < \infty\}] = 1 \implies \mathbb{E}|X_1| = +\infty$.

3) se $\mathbb{E}X_1^+ = +\infty$ ed $\mathbb{E}X_1^- < \infty \implies \frac{S_n}{n} \longrightarrow +\infty$ q.c.

TEOREMA del LIMITE CENTRALE

IDEA: se LGN dava il limite per S_n/n, il TLC mi quantifica le oscillazioni della successione attorno al limite (i.e. la velocità di convergenza $\sim\sqrt{n}$)

Definiamo il seguente...

DEF. Variabile Gaussiana Reale

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $d \geq 1$. Una VARIABILE GAUSSIANA è una variabile aleatoria reale per cui esistono $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \in (0,\infty)$ con cui

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2}$$

è densità.

DEF. Vettore Gaussiano

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un VETTORE GAUSSIANO è $X = (X_1, \dots, X_d)$ una variabile aleatoria in $\mathbb{R}^d$ tale che

$\forall u \in \mathbb{R}^d \quad u \cdot X$ è variabile aleatoria reale Gaussiana.

OSS.

Un vettore Gaussiano ha momenti di ogni ordine $\mathbb{E}[|X_1|^{e_1} \cdot \ldots \cdot |X_d|^{e_d}]$.

DEF. Media e Covarianza

Data X v.a. a valori in $\mathbb{R}^d$, definiamo:

- VETTORE della MEDIA $\quad m = \mathbb{E}X := (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_d)$.
- MATRICE di COVARIANZA $\quad Q_{ij} := Cov(X_i, X_j) \quad \forall i,j$.