1 Esercizio 1 Proving Stuff

Useremo questo lemma dimostrato nel corso di algebra 2:

Lemma 1. Sia (A, P) un anello locale e sia M un $A-$modulo finitamente generato, allora ogni insieme minimale di generatori di M ha la stessa cardinalità.

Nelle ipotesi dell'esercizio dobbiamo dimostrare che A regolare $\iff$ $x_1, \dots, x_r$ formano una sequenza regolare.

Esercizio. $\boxed{\implies}$ Dimostriamo per induzione su r che $\overline{x_{n+1}}$ non è un divisore di zero in $\frac{A}{(x_1,\dots,x_n)}$ per ogni $n \geq 0$. Dato che A è regolare, P ammette un sistema regolare di parametri di cardinalità $ht(P)$. Inoltre, visto che $x_1, \dots, x_r$ è un insieme minimale di generatori di P, che P è un A modulo finitamente generato, e che ogni sistema regolare di parametri è un insieme minimale di generatori, per il lemma precedente ogni sistema regolare di parametri di P ha cardinalità r. Dunque P ha altezza r e $x_1, \dots, x_r$ è un sistema regolare di parametri. Il caso $n = 0$ segue dal fatto che gli anelli locali regolari sono domini per quanto visto in classe. Il caso $n > 0$ segue usando l'ipotesi induttiva su $\overline{x_2}, \dots, \overline{x_r}$ e $\frac{A}{(x_1)}$, che è regolare di dimensione $r - 1$ per quanto visto in classe, e i teoremi di omomorfismo.

$\boxed{\impliedby}$ La tesi segue mostrando che $ht(P) = r$, dunque procediamo mostrando per induzione su n che ogni primo minimale sopra $(x_1, \dots, x_n)$ ha altezza n. Per $n = 0$ la tesi è vera per definizione. Consideriamo Q un ideale primo minimale sopra $(x_1, \dots, x_{n+1})$, per i teoremi sull'altezza sappiamo che $ht(Q) \leq n + 1$. L'altra disuguaglianza segue osservando che Q è primo non minimale sopra $(x_1, \dots, x_n)$ e che quindi esiste un ideale primo di altezza n strettamente contenuto in Q. Infatti, la proiezione su $\frac{A}{(x_1,\dots,x_n)}$ di un primo minimale sopra $(x_1, \dots, x_n)$ è minimale sopra 0 e quindi contiene solo divisori di zero, ma $\overline{x_{n+1}}$ non è un divisore di zero per ipotesi; da questo segue che Q, che contiene x_{n+1}, non è minimale sopra $(x_1, \dots, x_n)$ come voluto. $\square$

2 Esecizio 2 Proving Stuff

Sia $0 < i < r$. Consideriamo P un ideale primo di altezza $i - 1$ che faccia parte di una catena di primi lunga almeno $i + 1 \leq r$ e consideriamo anche $B := \frac{A}{P}$; la tesi segue mostrando che esistono infiniti primi di altezza 1 in B. Iniziamo osservando che B è un dominio e che, per la scelta di P, contiene un primo di altezza 2; chiamiamo Q un primo di altezza 2 di B. Per i teoremi dell'ideale principale, essendo B un dominio, ogni elemento di B, e quindi di Q, è contenuto in un primo di altezza 1; dunque, se per assurdo l'insieme dei primi di B di altezza 1 fosse finito, allora Q sarebbe contenuto in uno di questi per il lemma di scansamento, ma questo è impossibile perché Q ha altezza 2.

3 Esercizio 1 Computing Stuff

Useremo il seguente fatto visto a algebra 2:

Lemma 2. Sia A un anello. Dati $e_1, \dots, e_n \in A$ tali che $i \neq j \to e_i e_j = 0$ e $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1 \in A$ si ha che $A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} e_i A$.

Esercizio. $\mathfrak{m} := (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \subset A$ è un ideale massimale tale che $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è uno $A/\mathfrak{m}$ spazio vettoriale di dimensione 3, infatti è isomorfo a $(x, y, z)/(x^2, y^2, z^2, xy, xz, zy)$. Tuttavia non esiste in B un ideale con questa proprietà, infatti ogni ideale massimale $\mathfrak{m} \subset B$ è tale che $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ha dimensione minore o uguale a 2. Infatti $K[x, y]$ è regolare di dimensione 2, dunque ogni suo ideale ammette un insieme minimale di generatori di al più due elementi, perciò, portando tali generatori al quoziente, anche ogni ideale di B rispetta questa proprietà dato che ogni ideale di B si può vedere come ideale di $K[x, y]$, dunque ogni spazio della forma $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ è span di due vettori.

Per svolgere la seconda parte, prendiamo $a = \overline{x + y + z} \in A$ e $b = \overline{xy + x(x - y) + y(x - y)} \in B$.

Iniziamo da A. Usiamo il lemma su $A[1/a]$ e $e_1 = \overline{x}/a$, $e_2 = \overline{y}/a$, $e_3 = \overline{z}/a \in A[1/a]$. Per simmetria la tesi segue mostrando che $A_1 := e_1 A[1/a] \cong \mathbb{K}[x, 1/x]$. Notiamo che ogni elemento di A_1 è della forma $\frac{\overline{x}p}{a^n}$ con $p \in A_1$ e $n \in \mathbb{N}^{>0}$ e che $\overline{x}/a \in A_1$ è l'elemento neutro della moltiplicazione, infatti, $\frac{\overline{x}}{a}\frac{\overline{x}p}{q} = \frac{\overline{x^2p}}{aq} + \frac{\overline{xy}}{aq} + \frac{\overline{xz}}{aq} = \frac{a\overline{x}p}{aq} = \frac{\overline{x}p}{q}$. L'idea è che quella di identificare $1/x$ con a. Consideriamo dunque il seguente omomorfismo $\mathbb{K}[x, 1/x] \to A_1$ tale che $\sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mapsto \frac{\sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} x^{i+1}}{a^{-k+1}} \in A_1$ con $k \in \mathbb{Z}^{\leq 0}$. Tale omomorfismo è suriettivo, infatti preso un elemento generico $\overline{x}p/a^n \in A_1$ possiamo assumere senza perdita di generalità che p sia rappresentato da un polinomio nella sola x poiché $\overline{xy} = \overline{xz} = 0$. Tale omomorfismo è anche iniettivo, infatti $\overline{x}p/a^n = 0$ se $\overline{x}p = 0$ (dato che a non è un divisore di 0 in A), ma questo accade solo se $p = \overline{0}$ dato che avevamo supposto che il rappresentante di p fosse un polinomio nella sola variabile x.

Sull'anello B la procedura è la stessa, ad esempio il caso $\left(\frac{\overline{x(x-y)}}{b}\right) B[1/b] \cong \mathbb{K}[x, 1/x]$ si svolge in modo analogo a quello appena svolto. L'unica cosa che rimane da giustificare è la simmetria dei tre casi che forse non è così evidente. A tal fine consideriamo l'omomorfismo di $\mathbb{K}-$algebre suriettivo $\mathbb{K}[x, y] \to B$ tale che $x \mapsto \overline{x}$ e $y \mapsto \overline{x - y}$ il cui nucleo è $(xy(x - y))$. □

4 Esercizio 3 Computing Stuff

Dimostrazione. Per quanto visto a teoria ogni elemento di $\hat{A}$ è della forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n \in \mathfrak{m}^n$. Data una serie di quella forma, la successione delle somme parziali rappresenta una successione coerente (passando ogni elemento all'opportuno quoziente); ragionando su questo possiamo ricavare la regola del prodotto di due siffatte serie e stabilire una convenzione per ottenere una scrittura unica di queste serie. Infatti, il prodotto in $\hat{A}$ di due tali serie si determina per approssimazione: i primi n addendi del prodotto coincidono con i primi n addendi del prodotto in A delle somme parziali ottenute troncando all'addendo n le serie dei fattori originali. Inoltre, fissata una funzione di scelta di rappresentanti φ, ovvero una funzione $\varphi : \bigcup_n \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \to A$ tale che per ogni $[a]_n \in \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ si ha $\varphi([a]_n) \in [a]_n$, possiamo anche supporre che $a_n \in [a]_n \to a_n = \varphi([a]_n)$; con questa convenzione la rappresentazione di un elemento di $\hat{A}$ è unica. L'esistenza di una tale scrittura si ottiene per approssimazioni successive costruendo gli addendi ricorsivamente. Nel nostro contesto, possiamo scrivere in modo unico ogni elemento di $\hat{A}$ nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ con $p_n \in A$ polinomio omogeneo di grado n. D'ora in avanti, per convenzione, ogni serie o sommatoria avrà come $n-$esimo addendo un polinomio omogeneo di grado n.

(1) La mappa $\hat{A} \to A/\mathfrak{m}^{k+1}$ manda $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ in $\sum_{n=0}^{k} \overline{p_n}$. Pertanto, l'ideale $M = M^1$ è costituito da tutte le serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_0 = 0$. Ad esempio $s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^n \in M$. Il sottomodulo $\mathfrak{m}\hat{A}$ è costituito dagli elementi della forma pf con $f \in \hat{A}$ e $p \in \mathfrak{m} \subset A$. Affermo che $s \notin \mathfrak{m}\hat{A}$, ovvero s non è della forma pf come sopra. Supponiamo per assurdo che lo sia. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$. Ogni monomio di pf è divisibile per un monomio di p, dunque per una delle variabili $x_1, \dots, x_k$ dato che il termine noto di p è 0. Questo però è contraddittorio, infatti il $k+1$-esimo addendo di s non è divisibile per nessuna di queste variabili, e, dato che stiamo lavorando con rappresentazione uniche, otteniamo un assurdo.

(2) Supponiamo per assurdo che $\hat{A}$ sia $\mathfrak{m}$-adicamente completo. Vale che $\mathfrak{m}^k\hat{A} \subset M^k$, infatti i primi k addendi di $\sum_{n=k}^{N} a_i \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sono $0 \cdot \sum_{n=0}^{k-1} b_n = 0$. Dunque la topologia indotta da $\mathfrak{m}$ è più fine di quella indotta da M^n, e perciò ogni successione a valori in $\hat{A}$ avente limite x nella topologia $\mathfrak{m}-$adica ha limite x anche nella topologia M^n-adica. Consideriamo la seguente successione di somme parziali a valori in $\hat{A}$: $s_N = \sum_{n=0}^{N} x_n^n \in A \subset \hat{A}$. La differenza $s_{n_1} - s_{n_2} \in \mathfrak{m}^n\hat{A}$ con $n = min\{n_1, n_2\} + 1$, dunque la successione è di cauchy e converge perché avevamo supposto che $\hat{A}$ fosse completo. Deve convergere a $s = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^n$ dato che questo è il suo limite nella topologia M^n-adica ($\sum_{n=N}^{\infty} x_n^n \in M^N$). Tuttavia nessun elemento $s - s_n$ appartiene a $\mathfrak{m}\hat{A}$ per lo stesso ragionamento fatto nel punto precedente. Giungiamo dunque a una contraddizione, percui è stato assurdo supporre che $\hat{A}$ fosse completo nella topologia $\mathfrak{m}$-adica. □