Esercizi Ultrafiltri dal 16/10/23 in avanti

a.snaidero

January 2024

1 16/10/23

1.1 Esercizio 1 (Schur forte)

Dimostrare Schur forte, ovvero $\forall\ \mathbb{N} = C_1 \dots C_r$ esiste un colore C_i e esistono infinite $a \in C_i$ per cui esistono infiniti $b \in C_i$ tali che $a + b \in C_i$.

Basta affermare che data una r-colorazione dei naturali esiste un colore tale che per ogni n esista un $a > n$ con la prorpietà sudetta. Fissimo dunque una r-colorazione $\mathbb{N} = C_1 \dots C_r$ e un naturale n. Per il teorema delle differenze siano i e $H = \{x_1 < x_2 < \dots\} \subset \mathbb{N}$ infinito tali che $H \ominus H \subset C_i$. Senza perdità di generalità possiamo supporre $x_1 > n$, basta intersecare H con $(n, +\infty)$. Chiamati dunque $a = x_2 - x_1$ e $b_i = x_{i+2} - x_2$ si ha $a,\ b_i,\ a + b_i = x_{i+2} - x_1 \in H \ominus H \subset C_i$ come voluto.

1.2 Esercizio 2

Trovare una 2-colorazione di $\mathbb{N}$ tale che per ogni $n \neq 0$, n e $2n$ non siano monocromatici.

Sia $C_1 = \{4^k(2h+1)|k,\ h \in \mathbb{N}\}$ e $C_2 = \{4^k(2h+1)2|k,\ h \in \mathbb{N}\}$, tale colorazione è quella cercata.

1.3 Esercizio 3

Sia (X, B, μ, T) un *measure preserving system* e $A \in B$ non trascurabile, si dimostri che $\mu(\{x \in A | \exists n \in \mathbb{N} : T^n(x) \in A\}) = \mu(A)$.

Sia $A_0 = \{x \in A | \nexists n : T^n(x) \in A\}$, vale che $A_0 = A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} T^{-n}[A]$ dunque è misurabile. La tesi segue verificando che A_0 abbia misura nulla. Siano $A_n = T^{-n}[A_0]$, tutti questi insiemi sono disgiunti infatti se per assurdo $A_n \cap A_{n+m} \neq \emptyset$ allora si avrebbe che $T^n[A_n] \cap T^n[A_{n+m}] \neq \emptyset$ cioè $A_0 \cap A_m \neq \emptyset$ da cui l'assurdo $A \supset A_0 \supset T^m[A_0] \cap A_0 \supset T^m[A_0 \cap A_m] \neq \emptyset$. Se per assurdo $\mu(A_0) > 0$ allora $\exists n : 1 < \mu(\bigcup_{i=0}^{n} A_i) \leq \mu(X) = 1 \quad ↯$.

1.4 Esercizio 4

Si dimostri che ogni campo ordinato che estende $\mathbb{R}$ non è arcihmedeo.

Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato che estende i reali e sia $x \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$, a meno di cambiare il segno possiamo supporre x positivo. Si consideri A l'insieme di tutti i reali minori di x. Poiché $A \subset \mathbb{R}$ si danno due casi: o A è illimitato dentro i reali oppure esiste, e lo chiamiamo y, il *sup* in $\mathbb{R}$ di A. Nel primo caso si deve avere che $\forall r \in \mathbb{R}\ x^{-1} < r$ altrimenti troviamo $r \in \mathbb{R} : r^{-1} \geq x$, ovvero x è più piccolo di tutti i reali dunque dei reciproci dei naturali cioè la tesi. Nel secondo caso per ogni naturale n si ha che $|x - y| < n^{-1}$, altrimenti per un qualche naturale n si troverebbe il numero reale $y \pm n^{-1}$ fra y e x contro la costruzione di y $\lightning$.

1.5 Esercizio 5

Dato un campo ordinato $\mathbb{K}$ che estende $\mathbb{R}$, si dimostri che le seguenti proprietà sono equivalenti:

1. $\mathbb{K}$ non è archimedeo;
2. esistono numeri infinitesimi in $\mathbb{K}$
3. $\mathbb{Q}$ non è denso in $\mathbb{K}$
4. $\mathbb{N}$ è limitato in $\mathbb{K}$

1. $\Longrightarrow$ 2.
Sia $x \in \mathbb{K}$ tale che per ogni n naturale $x < n^{-1}$, allora dato un reale positivo r, preso un naturale n tale che $n^{-1} < r$, si ha che $x < n^{-1} < r$ dunque x è minore di tutti i reali positivi cioè è un infinitesimo.

2. $\Longrightarrow$ 3.
Sia $x \in \mathbb{K}$ un infinitesimo positivo, fra x e $2x$ non esistono reali, in particolare razionali, altrimenti detto $q \in \mathbb{Q}\ :\ x < q < 2x$ si avrebbe che $\frac{q}{2} < x$ contraddicendo il fatto che x è un infinitesimo.

3. $\Longrightarrow$ 4.
Siano $x, y \in \mathbb{K}\ x < y$ tali che $\nexists q \in \mathbb{Q}\ :\ x < q < y$. Chimiamo z il *sup* in $\mathbb{R}$ dei reali minori di x, poiché i razionali sono densi nei reali non esiste nemmeno un reale r tale che $x < r < y$ allora o $z \leq x$ o $y \geq z$. Non può esistere un naturale n tale che $n^{-1} < y - x$ altrimenti $x < z \pm n^{-1} < y$ assurdo per quanto detto. Allora $\mathbb{N}$ è limitato in $\mathbb{K}$ da $(y - x)^{-1}$.

4. $\Longrightarrow$ 1.
Sia $x \in \mathbb{K}$ che limita i naturali, allora x^{-1} è minore del reciproco di ogni naturale.

2 18/10/2024

2.1 Esecizio 6

Dimostrare che data una colorazione finita dei naturali $\mathbb{N} = C_1 \cup \cdots \cup C_n$ esiste un insieme monocromatico con densità asintotica positiva.

Dimostriamo una cosa più forte, ovvero che la densità asintotica è subadditiva, allora poiché la densità dell'unione dei "colori" è $\bar{d}(\mathbb{N}) = 1$ si deve avere che la somma delle densità sia maggiore o uguale a 1 da cui almeno una delle densità deve essere positiva.
Siano dunque dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{N}$ e chiamiamo $C = A \cup B$, siano $a_n = \left|A \cap [1,n]\right| \cdot n^{-1}$, $b_n = \left|B \cap [1,n]\right| \cdot n^{-1}$, $\beta_n = \left|(B \setminus A) \cap [1,n]\right| \cdot n^{-1}$ e $c_n = \left|C \cap [1,n]\right| \cdot n^{-1}$. Ovviamente si ha $c_n = a_n + \beta_n$, dunque $\bar{d}(C) = \limsup_n c_n = \limsup_n a_n + \beta_n \leq \limsup_n a_n + \limsup_n \beta_n \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n = \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$

2.2 Esercizio 7

Dato un *measure preserving system* (X, B, μ, T), dato E un insieme finito di inidici, si dimostri che preso $A \in B$, si ha $\mu(\{x \in A | \exists n \in E \ominus E \ : \ T^n(x) \in A\}) \geq \mu(A) - |E|^{-1}$.

2.3 Esecizio 8

Trovare un insieme spesso di numeri naturali A con densità asintotica superiore nulla.

Si consideri l'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} | \exists k \ : \ 2^k < n \leq 2^k + k\}$. A è chiaramente spesso, calcoliamo la sua densità asintotica. Chiamiamo $a_n = \left|A \cap [1,n]\right| \cdot n^{-1}$, per ogni $2^k \leq n \leq 2^{k+1}$ si ha che $a_n \leq a_{2^k+k}$, allora $\bar{d}(A) = \limsup_k a_{2^k+k} = \limsup_k \left|A \cap [1, 2^k + k]\right| \cdot (2^k + k)^{-1} \leq \limsup_k (\Sigma_{i=0}^k i) \cdot 2^{-k} = \limsup_k k(k-1) \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-k} = 0$

2.4 Esercizio 9

Dimostrare che le seguenti sono equivalenti:

1. A è spesso
2. $\mathcal{F} = \{A\} \cup \{A - n | n \in \mathbb{N}\}$ ha la FIP
3. $\forall F \subset \mathbb{N}$ finito esiste $a \in A$ tale che $a + F \subset A$.

1. $\Longrightarrow$ 2.
Si consideri $\{A - n_1,\ A - n_2, \ldots,\ A - n_k\}$ un qualsiasi sottoinsieme di $\mathcal{F}$ e sia $n = max(n_1,\ \ldots,\ n_k)$. Poiché A contiene un intervallo lungo almeno n, cioè $[x, x+n] \subset A$, allora per ogni $1 \leq i \leq k$ si ha che $x \in [x, x+n-n_i] \subset A - n_i$,

allora $x \in \bigcap_{i=1}^{k} A - n_i$, cioè $\mathcal{F}$ ha la FIP.

2. $\Longrightarrow$ **3.**
Sia $F \subset \mathbb{N}$ finito, sia $n = max(F)$, sia $a \geq n$ tale che $a \in \bigcap_{i=0}^{n} A - i$, che esiste perché $\mathcal{F}$ ha la FIP, allora $\forall i : 0 \leq i \leq n$ si ha $a - i \in A$, dunque $a + F \subset [a, a+n] \subset A$.

3. $\Longrightarrow$ **1.**
Sia $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, consideriamo l'insieme finito $[0, n]$, per 3. $\exists a : [a, n+a] \subset A$, dunque A contiene un intervallo lungo n.

2.5 Esecizio 10

Si dimostriche le seguenti famiglie di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ sono SPR:

1. $\{A | \bar{d}(A) > 0\}$
2. Gli insieme AP-rich, ossia che contengono progressioni aritmetiche infinite.
3. Come sopra ma con le progressioni geometriche

1. Questo segue immediatamente notando che, come mostrato in precedenza (esercizio 6), la densità asintotica positiva è subadditiva, dunque l'unione di insiemi con densità asintotica superiore nulla ha densità superiore nulla, cioè la contronominale.

2. Sia A un insieme AP-rich, diamone una colorazione $A = C_1 \cup \cdots \cup C_r$. Per concludere basta far vedere che fissata una lunghezza l esiste i tale che C_i contiene una progressione aritmetica lunga l. Sia n tale che ogni r-colorazione di $[1, n]$ è tale per cui esiste un colore che contiene una prograssione aritmetica lunga l, tale n esiste per il teorema di Van Der Waerden e compattezza combinatoria. Poiché A è AP-rich, contiene una progressione aritmetica lunga n, ovvero $\exists x_0, d, :$ per ogni $k \in [0, n]$ si ha $x_k = x_0 + kd \in A$. Sia D_i una r-colorazine di $[1, n]$ tale che $m \in D_i \iff x_m \in C_i$, per la scelta di n $\exists i$ tale che D_i contiene una progressione lunga l, ovvero $\exists y_0, d', :$ per ogni $k \in [0, l]$ si ha $y_k = y_0 + kd' \in D_i$, allora per ogni $k \in [0, l]$ si ha che $z_k = x_{y_k} = x_0 + y_0 d + kdd' \in C_i$, cioè C_i contiene una progressione aritmetica lunga l.

3. Sia A un insieme contente progressioni geometriche arbitrariamente lunghe, diamone una colorazione $A = C_1 \cup \cdots \cup C_r$. Per concludere basta far vedere che fissata una lunghezza l esiste i tale che C_i contiene una progressione geometrica lunga l. Sia n tale che ogni r-colorazione di $[1, n]$ è tale per cui esiste un colore che contiene una prograssione aritmetica lunga l, tale n esiste per il teorema di Van Der Waerden e compattezza combinatoria. Poiché A contiene progressioni geometriche arbitratiamente lunghe, contiene una progressione geometrica lunga n, ovvero $\exists x_0, d, :$ per ogni $k \in [0, n]$ si ha $x_k = x_0 d^k \in A$.

Sia D_i una r-colorazine di $[1, n]$ tale che $m \in D_i \iff x_m \in C_i$, per la scelta di n $\exists i$ tale che D_i contiene una progressione lunga l, ovvero $\exists y_0, d',$: per ogni $k \in [0, l]$ si ha $y_k = y_0 + kd' \in D_i$, allora per ogni $k \in [0, l]$ si ha che $z_k = x_{y_k} = x_0 d^{y_0 + kd'} = x_0 d^{y_0} (d^{d'})^k \in C_i$, cioè C_i contiene una progressione geometrica lunga l.

2.6 Esercizio 11

Sia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ chiuso per sovrainsiemi, dimostra che $\mathcal{F}^* = \{B \subset X | \forall A \in \mathcal{F}\ B \cap A \neq \emptyset\}$.

$\boxed{\subset}$ Preso $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F}^*$, supponiamo per assurdo che $A \cap B = \emptyset$ allora $A \subset B^c$ e poiché $\mathcal{F}$ è chiuso per sovrainsiemi $B^c \in \mathcal{F}$, cioè $B \notin \mathcal{F}^*$ per definizione di famiglia duale $\lightning$.
$\boxed{\supset}$ Sia $B \subset X$ tale che per ogni $A \in \mathcal{F}$ si abbia $A \cap B \neq \emptyset$, allora per ogni $A \in \mathcal{F}$ si ha che $\neg B \subset A^c$, in particolare $B \neq A^c$ cioè $B \in \mathcal{F}^*$ per definizione di famiglia duale.

2.7 Esercizio 12

Gli ultrafiltri sono gli unici insiemi autoduali?

No, ad esempio su $X = \{1\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ è autoduale. In realtà si possono fare esempi meno banali, infatti dato un insieme X, ogni F sottoinsime delle parti di X tale che nessun elemento di F è il complementare di un altro suo elemento può essere esteso a una famiglia autoduale per ricorsione trasfinita (o per Zorn, esattemente come si dimostra che ogni filtro si può estendere a un ultrafiltro). Si procede bene ordinando le parti di X, e costruendo $F_{\alpha+1}$ per ricorsione aggiungendo a F_α l'α-esimo elemento di $\mathcal{P}(X)$ se e sole se il suo complementare non sta già in F_α e ovviamente facendo le unioni agli ordinali limite.

2.8 Esercizio 13

Dimostrare che valgono le seguenti implicazioni e che sono strette: spesso $\implies$ IP-set $\implies$ Δ-set.

$\boxed{\text{spesso} \implies \text{IP-set}}$ Sia A un insieme spesso, si costruisca per ricorsione la seguente successione a valori naturali $x_0 = min(A)$, e, dati $x_0, \ldots, x_n$, chiamato $m_n = max(FS(x_0, \ldots, x_n))$ (dove poniamo $max(\emptyset) = 0$), chiamato x tale che $[x, x+1+x_n+m_n] \subset A$, allora definiamo $x_{n+1} = x+1+x_n$. Si dimostra per induzione che la successione è crescente e che contiene $FS(x_0, \ldots, x_n)$ per ogni n. Infatti $FS(x_0) = \emptyset$, e $FS(x_0, \ldots, x_{n+1}) \setminus FS(x_0, \ldots, x_n) \subset [x_{n+1}, x_{n+1}+m_n] \subset A$ per la scelta di x_{n+1}, dunque supponendo che $FS(x_0, \ldots, x_n) \subset A$ allora $FS(x_0, \ldots, x_{n+1}) \subset A$.
$\boxed{\text{IP-set} \implies \Delta\text{-set}}$ Sia $X = \{x_1 < x_2 < \ldots\} \subset \mathbb{N}$ infinito e sia A tale che $FS(X) \subset A$ allora sia $Y = \{y_1 = x_1 < y_2 = x_1 + x_2 < \cdots < y_n =$

$x_1 + \cdots + x_n < \dots\}$ allora si ha che $Y \ominus Y \subset A$, infatti presi $y_n < y_m$ si ha $y_m - y_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m \in FS(X) \subset A$.

$\boxed{\text{IP-set} \not\Longrightarrow \text{spesso}}$ Si consideri la seguente successione definita per ricorsione: $x_1 = 0$, e dati $x_1, \dots, x_n$ si definisce $x_{n+1} = m_n = max(FS(x_1, \dots, x_n)) + 2$ dove ancora poniamo $max(\emptyset) = 0$. Consideriamo l'insieme $X = FS(\{x_1, x_2, \dots\})$. X chiaramente è un IP-set, ma non è spesso, infatti non contiene nemmeno intervalli lunghi 2, dimostriamolo. Ovviamente la successione m_n è crescente, allora ci basta dimostrare per induzione su n che $X \cap [0, m_n]$ non contiene intervalli lunghi due. Per $n = 0$ è ovvio. Supponiamolo per n e distriamolo per $n+1$: sia per assurdo $x,\, x+1 \in X \cap [0, m_{n+1}]$, per ipotesi induttiva possiamo assumere che $x,\, x+1 \in X \cap [m_n + 1, m_{n+1}]$. Sia $x = \sum_{j=0}^{k} x_{i_j}$, poiché per ogni $l > n+1$ si ha che $x_l > m_{n+1} \geq x$, sappiamo che $max(i_j)_j \leq n+1$, d'altra parte si ha che se $max(i_j)_j < n+1$ si avrebbe $x \in FS(x_1, \dots, x_n)$ da cui $x < m_n < x$, allora $max(i_j)_j = n+1$, allora $x - x_{n+1}, x+1-x_{n+1} \in FS(x_1, \dots, x_n) \subset X \cap [0, m_n]$, il che è assurdo per ipotesi induttiva $\lightning$.
$\boxed{\Delta\text{-set} \not\Longrightarrow \text{IP-set}}$ Si consideri $X = \{10^k | k \in \mathbb{N}\}$, sia $A = X \ominus X$. Ovviamente A è un Δ-set, ma non è un IP-set. Infatti se per assurdo fosse $Y = \{y_0 < y_1 < y_2 < \dots\}$ tale che $FS(Y) \subset A$, si avrebbe $y_0, y_1 \in A$ ma allora devono esistere $k_0 < h_0,\ k_1 < h_1$ tali che $y_0 = 10^{h_0} - 10^{k_0}$ e $y_1 = 10^{h_1} - 10^{k_1}$, da cui deduciamo che $h_0 \leq h_1$. Allora si ha $y = y_0 + y_1 = 10^{h_0} - 10^{k_0} + 10^{h_1} - 10^{k_1} = 10^h - 10^k \in A$ per un qualche $h,\, k$. Notiamo che $10^h - 10^{h-1} \leq y < 10^h$ e poiché $10^{h_1} - 2 \cdot 10^{h_1 - 1} < y < 2 \cdot 10^{h_1}$ si deve avere che $h_1 = h$. Allora risulta che $10^k = 10^{k_1} - 10^{h_0} + k_0$ che è una potenza di 10 se e solo se $h_0 = k_1,\ k = k_0$. Prendiamo allora un terzo $y_2 = 10^{h_2} - 10^{k_2} \in Y$, poiché si ha $y_1 < y_2$ deduciamo che $h_1 < h_2$. Per gli stessi ragionamenti, poiché $y_2 - y_1,\, y_2 - y_0 \in A$, si ha che $h_2 = k_1$ e $h_2 = k_0$, da cui $k_1 = k_0$ il che è assurdo perché come abbiamo detto prima $h_0 = k_1$ ma $h_0 > k_0$.

3 23/10/2024

3.1 Esercizio 14

Dimostrare che se un sottoisnieme A di $\mathbb{Z}$ ha densità di banach 1 allora è spesso.

Troviamo un intervallo lungo l in A. Chiamiamo $x_n = \max_{x \in \mathbb{Z}} \left|A \cap [x+1, x+n]\right| n^{-1}$. Poiché $BD(A) = \lim_n x_n = 1$, sia $m : \forall n > m\, x_n > 1 - l^{-1}$, si prenda poi dl il primo multiplo intero di l maggiore di m. Sia $x : \left|A \cap [x+1, x+dl]\right| (dl)^{-1} > 1 - l^{-1}$ allora $\left|A \cap [x+1, x+dl]\right| > dl - d$, dunque deve un $0 < k \leq d$ tale che $[x + (k-1)d + 1, x + kl] \subset A$.

3.2 Esercizio 15

Dimostrare che

1. Se A è sindetico a tratti ha densità di Banach positiva
2. Se A è sindetico allora ha densità asintotica superiore positiva

1. Sia $A = B \cap C$ con B spesso e C con "buchi limitati da k" (cioè $\forall n\, [n+1, n+k] \cap C \neq \emptyset$). Definiamo $x_n = \max_{x \in \mathbb{Z}} \left| A \cap [x+1, x+n] \right| n^{-1}$ e dimostriamo che x_{nk} è maggiore uguale di k^{-1}. Sia fissato n, sia x tale che $[x+1, x+nk] \subset B$ allora per ogni $0 \leq h < n$ $[x+hk+1, x+hk+k] \cap A = [x+hk+1, x+hk+k] \cap B \cap C = [x+hk+1, x+hk+k] \cap C \neq \emptyset$, allora $\left|[x+1, x+nk] \cap A\right| \geq n$ da cui la tesi.
2. Sia A con "buchi limitati da k". Allora analogamente a prima $\left|[1, nk] \cap A\right| \geq n$, per cui $\bar{d}(A) \geq \lim_n k^{-1} - n^{-1} = k^{-1} > 0$.

3.3 Esercizio 16

Trovare dei controesempi ai viceversa dell'esercizio precedente.

1. Dato un insieme A, chiamiamo $P_A(k,l)$ la seguente proprietà: $\forall x\, [x+1, x+l] \cap A$ ha dei buchi lunghi k (cioè ognuno degli intervalli $[x+1, x+l]$ ammette un sottointervallo lungo k che è contenuto nel complementare di A). Dobbiamo trovare un insime con densità di Banach positiva che non sia sindetico a tratti, ovvero tale che per $\forall k \exists l : P_A(k,l)$.
Costruiamo per ricorsione una successione di naturali strettamente crescente l_i tale che $L_i := \sum_{j=1}^{i} l_j \leq l_i$ e una di successione di insiemi $I_i \subset [0, l_i - 1]$ tali che $\forall j \leq i$ valga $P_{I_i}(j, l_j)$ e $|I_i|\, l_i^{-1} > 4^{-1}$. Poniamo $I_1 := \{1, 2\}$, $l_1 := 4$ e

$$I_{i+1} := \bigcup_{j=1}^{m} (I_i + i + 1 + j l_i) = \{x + i + 1 + j l_i | x \in I_i,\, 1 \leq j \leq m\}$$

$$l_{i+1} := 2i + 2 + m l_i$$

Dove m è tale che $l_{i+1} \geq L_{i+1}$ e $|I_{i+1}|\, l_{i+1}^{-1} > 4^{-1}$, osserviamo che se $|I_i|\, l_i^{-1} > 4^{-1}$ tale m esiste. Diamo una visione euristica della costruzione fatta e spieghiamo come mai $\forall j \leq i$ valga $P_{I_i}(j, l_j)$. Dobbiamo vedere ogni I_{i+1} come "lungo" l_{i+1} (cioè pensiamo semplicemente $I_{i+1} \in \mathcal{P}([0, l_{i+1} - 1])$), in questo modo I_i risulta formato da uno "spazio vuoto" iniziale e uno finale ciascuno lungo $i+1$. Nel mezzo I_{i+1} è formato giustapponendo m volte l'insieme I_i (da immaginare come lungo l_i). In questo modo qualunque intervallo lungo $l_j \leq l_i$ o sta interamente in un traslato di I_i e quindi contiene un buco lungo i per costruzione di I_i, oppure sta in mezzo a due traslati di I_i (o fra un traslato e lo "spazio vuoto" iniziale o finale), in ogni caso contiene un buco lungo j perché a loro volta gli insiemi I_i erano costruiti con "spazi vuoti" iniziali e finali lunghi i. Chiaramente anche un intervallo lungo l_{i+1} contiene un buco lungo $i+1$.
Poniamo

$$A := \bigcup_i I_i + L_i = \bigcup_i \{x + L_i | x \in I_i\}$$

Cioè A è formato giustapponendo gli insiemi I_i. Dimostriamo che vale $P_A(i, 3l_i)$ per ogni i.

Sia per assurdo $I = [x+1, x+3l_i]$ un intervallo che non contiene buchi lunghi i, se $x < -l_i$, allora poiché A è a valori non negativi I contiene un intervallo lungo l_i e $i \geq l_i$ perché l_i è strettamente crescente. Se invece $x > -l_i$ allora I contiene $2l_i$ valori non negativi, dunque poiché $L_i \leq l_i$, contiene un intervallo J lungo l_i tale che esiste un $j \geq i$ per cui J sta tutto dentro il traslato di I_j, ovvero $A \cap J = (I_j + L_j) \cap J = (I_j \cap (J - L_j)) + L_j$ che contiene un buco lungo i per costruzione. Chiarmente $BD(A) \geq \lim_i |I_i| \, l_i^{-1} > 4^{-1}$, anzi addirittura $\bar{d}(A) \geq \limsup_n L_{n+1}^{-1} \sum_{i=1}^{n} |I_i| > 4^{-1}$ ↯.

2. Si consideri l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} | 9 \cdot 10^k \leq x < 10^{k+1}\}$, chiaramente $\bar{d}(A) \geq 10^{-1}$ ma per ogni k si ha $[10^k, 9 \cdot 10^k - 1] \subset A^c$ cioè A non è sindetico.

3.4 Esercizio 17

Dimostrare che un funzione f tale che per ogni infinitesimo ϵ, $f(x+\epsilon) \sim f(x)$ è continua.

Sia $x_i \to x$ un qualunque successione che tende ad x. Supponiamo per assurdo che $f(x_i) \not\to f(x)$, equivalentemente x_i ammette una sottosuccessione x_{i_j} tale per cui esiste $\epsilon > 0 : \left| f(x_{i_j}) - x \right| > \epsilon$ per ogni j. Sia $[\sigma]$ tale che $\sigma(j) = x_{i_j} - x$. $[\sigma]$ è un infinitesimo, dunque ponendo $\varepsilon = [\sigma]$ si ha $\left| f(x+\varepsilon) - f(x) \right| < {}^*\epsilon$, ovvero l'insieme A degli indici $j : \left| f(x_{i_j}) - f(x) \right| < \epsilon$ appartiene a un ultrafiltro, in particolare non è vuoto ↯.

4 25/10/2024

4.1 Esercizio 18

Dimostrare che data una successione reale $(a_n)_n$ si ha $\lim_n a_n = l \iff \forall \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} \; a_\nu \sim l$

Innanzitutto prendiamo un ultrafiltro non principale sui naturali U e definiamo

$$ {}^*\mathbb{R} = \frac{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{U} $$

e osserviamo che se $[\sigma]$ è un ipernaturale infinito e $A \in U$ allora $\sigma(A)$ è illimitato.
$\boxed{\implies}$ Supponiamo per assurdo che esista $\nu = [\sigma]$ ipernaturale infinito tale che $a_\nu - l$ non è infinitesimo, allora per un qualche r reale positivo si ha $|a_\nu - l| > r$, da cui esiste $A \in U$ tale che per ogni $x \in A$ $a_{\sigma(x)} - l > r$, ovvero $\forall x \in \sigma(A)$ $|a_x - l| > r$ e poiché $\sigma(A)$ è illimitato si ottiene l'assurdo $a_x \not\to l$ ↯
$\boxed{\impliedby}$ Sia per assurdo $a_n \not\to l$ allora a_n ammette una sottosuccessione a_{n_i} tale per cui esiste $a_{n_i} \to l_0 \neq l$. Poiché $\nu = [i \mapsto n_i]$ è ipernaturale infinito si ha $a_\nu - l$ infinitesimo per ipotesi, cioè per ogni $r \in \mathbb{R}$ si ha $|a_\nu - l| < {}^*r$, da cui l'assurdo $|a_{n_i} - l| < r$ per infiniti i.

4.2 Esercizio 19

Sia a_n una successione reale. Mostrare che i limiti delle successioni di a_n che ammettono limiti coincidono con il valore di a_n valutata su ipernaturali non finiti. Cioè $\{\,l\,|\exists n_i \to \infty : \lim_i a_{n_i} = l\} = \{st(a_\nu)|\nu$ è ipernaturale infinito$\}$.

$\boxed{\subset}$ Sia $\lim_i a_{n_i} = l$. Consideriamo la successione $b_i = a_{n_i}$ e i numeri ipernaturali infiniti $\nu_1 = [Id_{\mathbb{N}}]$ e $\nu_2 = [i \mapsto n_i]$. Per l'esercizio precedente si ha che $\lim_i b_i = st(b_{\nu_1}) = st(a_{\nu_2})$.
$\boxed{\supset}$ Sia $\nu = [\sigma]$ un ipernaturale infinito tale che a_ν è finito. $a_\nu - {}^*st(a_\nu)$ è infinitesimo, allora per ogni r reale positivo $a_\nu - {}^*st(a_\nu) < r$ cioè $\left|a_{\sigma(n)} - st(a_\nu)\right| < r$ per ogni $n \in A_r$ per un qualche $A_r \in U$. Allora presa n_i tale che $n_i \in \sigma(A_{i^{-1}})$, per ogni reale positivo r per ogni naturale i si ha $\left|a_{n_i} - st(a_\nu)\right| < r$ definitivamente cioè $\lim_i a_{n_i} = st(a_\nu)$.

5 30/10/2023

5.1 Esercizio 20

Trovare $A, B \subset \mathbb{Z}$ con densità asintotica superiore positiva tali che $A \ominus B$ non sia sintetico. Sia dunque $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[6^i, 2\cdot 6^i), B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}}[5\cdot 6^i, 6^{i+1})$, la tesi si ottiene osservando che per ogni i si ha $[2\cdot 6^i, 3\cdot 6^i) \cap B \ominus A = \emptyset$. Infatti presi $a < b$ con $a \in [6^i, 2\cdot 6^i)$ e $b \in [5\cdot 6^j, 6^{j+1})$ si deve avere $i \le j$ dunque $a < 2\cdot 6^j$ da cui $b - a \in [3\cdot 6^j, 6^{j+1})$ che è disgiunto da $[2\cdot 6^k, 3\cdot 6^k)$ per ogni k.

5.2 Esercizio 21

Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e U ultrafiltro sui naturali dimostrare $f_*(U) = \{A \subset \mathbb{N}|f^{-1}[A] \in U\}$ è un ultrafiltro generato da $\{f(A)|A \in U\}$ e che $f_*(\bigsqcup_\alpha) = \bigsqcup_{{}^*f(\alpha)}$.

Che è un ultrafiltro segue dal fatto che anche U lo è. Vediamo il fatto sui generatori: ovviamente per ogni $A \in U$ si ha $f^{-1}[f[A]] = A \in U$ quindi $f(A) \in f_*(U)$. Viceversa preso $A \in f_*(U)$ si ha che A è un sovrainsieme di $f[f^{-1}[A]]$. Per quanto riguarda l'ultimo fatto si osserva che se $[\sigma] \in {}^*A$ allora $[f \circ \sigma] \in {}^*f[{}^*A]$.

5.3 Esercizio 22

$f \equiv_U g \implies f_*(U) = g_*(U)$

Sia $C \in U$ su cui f e g coincidono, allora preso $B = f(A) \in F := \{f(A)|A \in U\}$ si ha $B \supset f(C \cap A) = g(C \cap A) \in G := \{g(A)|A \in U\}$, e viceversa, cioè F e G generano lo stesso filtro quindi per l'esercizio precedente si ha $f_*(U) = g_*(U)$.

6 6/11/2023

6.1 Esercizio 23

Dimostrare che nè l'insieme dei cubi nè quello dei quadrati sono dei $\Delta - set$.

Siano $X = \{x_1 < x_2 < \dots,\} \subset \mathbb{N}$, $Y = X \ominus X$. Si deve avere che in Y esistono coppie di numeri arbitrariamente grandi a distanza $x_2 - x_1$ (ovvero $x_i - x_2$ e $x_i - x_1$), il che non accade nell'insieme dei cubi (né in quello dei quadrati) poiché la distanza minima fra due cubi (o due quadrati) maggiori di M tende all'infinito per M che va all'infinito.

6.2 Esercizio 24

Nel modello dell'ultrapotenza ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/U$ non vale il $\mathfrak{c}^+ - enlargement$.

Osserviamo preliminarmente che il modello ha cardinalità uguale a $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ dunque prendiamo $f : \omega_\alpha \to {}^*\mathbb{R}$ surgettiva con $\aleph_\alpha = \mathfrak{c}$. Costruiamo ricorsivamente $(A_\beta)_\beta$ una ω_α successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ con la FIP: $A_0 = \mathbb{R}$, $A_{\beta+1} = A_\beta \setminus \sigma_\beta[\mathbb{N}]$ dove poniamo (usando scelta) $[\sigma_\beta] = f(\beta)$, e $A_\lambda = \bigcap_{\beta\in\lambda} A_\beta$ quando λ è ordinale limite. Chiaramente $f(\beta) \notin {}^*A_\gamma$ per $\gamma > \beta$. Inoltre la suddetta successione ha la FIP perché a ogni passo togliamo una quantità numerabile, cioè $A_\beta = A_0 \setminus (\bigcup_{\gamma\in\beta} \sigma_\gamma[\mathbb{N}])$, ma $\mathfrak{c} = \aleph_\alpha$ dunque $|\bigcup_{\gamma\in\beta} \sigma_\gamma[\mathbb{N}]| = \mathfrak{c}$ (necessario affinché $A_\beta = \emptyset$) se e solo se $\beta = \alpha$. Propriamente la FIP segue osservando che la successione è decrescente per inclusione.

7 8/11/2023

7.1 Esercizio 24

Dato $A \subset \mathbb{N}$ e ${}^*\mathbb{N} = \mathbb{N}/U$ il modello dell'ultrapotenza si dimostri che
$\exists \xi, \eta, \zeta \in {}^*A : \xi + \eta = \zeta \iff \exists x, y, z \in A : x + y = z$

La freccia verso sinistra è triviale poiché ${}^*x + {}^*y = {}^*z$ e ${}^*x, {}^*y, {}^*z \in {}^*A$. Dimostriamo la freccia verso destra, scegliamo $\sigma_\nu \in {}^{\mathbb{N}}A : [\sigma_\nu] = \nu$ al variare di ν tra ξ, η, ζ. Sia $B \in U$ su cui $\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_\zeta$, allora preso $b \in B$ ponendo $x = \sigma_\xi(b)$, $y = \sigma_\eta(b)$, $z = \sigma_\zeta(b)$ si ha la tesi.

7.2 Esercizio 25

1. $\mathcal{O}_{A\cap B} = \mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B$
2. $\mathcal{O}_{A\cup B} = \mathcal{O}_A \cup \mathcal{O}_B$
3. $\mathcal{O}_{A^c} = {\mathcal{O}_A}^c$

1. L'inclusione verso sinistra si ha per chiusura degli ultrafiltri per sovrainsiemi, l'inclusione verso sinistra si ha per chiusura per intersezione.

2. L'inclusione verso sinistra è dovuta alla seguente proprietà: dato U ultrafiltro se $A \cup B = C \in U$ allora $A \in U \vee B \in U$. L'inclusione verso sinistra si ha per chiusura degli ultrafiltri per sovrainsieme.

3. Segue dalla seguente proprietà: dato U ultrafiltro su X, dato $A \subset X$ si ha $A \in U \longleftrightarrow A^c \notin U$, da cui deduciamo
$U \in \mathcal{O}_{A^c} \longleftrightarrow A^c \in U \longleftrightarrow A \notin U \longleftrightarrow U \notin \mathcal{O}_A \longleftrightarrow U \in {\mathcal{O}_A}^c$

8 13/11/2023

8.1 Esercizio 26

Dimostrare Tychonoff con la caratterizzazione nonstandard.

Siano X_i spazi topologici compatti con $i \in I$. Chiamiamo $X = \prod_{i \in I} X_i$ e costruiamo il modello non-standard ${}^*X$ su un insieme di indici J abbastanza granda da far valere la proprietà del $\kappa-$enlargment dove κ è la cardinalità di una base di X. In questo modo vale la caratterizzazione non standard di compatto. Notiamo che ogni spazio X_i ammette una base di cardinalità di al più κ. Sia $\xi \in {}^*X$, si ha $\xi = [(y_j)_{j \in J}]$ con $y_j \in X$ al variare di j in un insieme di indici. Dunque $y_j = (y_j^i)_{i \in I}$, si consideri $\xi_i = (y_j^i)_{j \in J} \in {}^*X_i$, poiché X_i compatto, poiché vale il $\kappa-$enlargment, $\exists z_i \in X_i$ tale che $\xi_i \in \mu(z_i)$. Dunque, chiamato $z = (z_i)_{i \in I}$, si ha $\xi \in \mu(z)$, infatti un qualunque intorno U di z è intersezione finita di controimmagini tramite le proiezioni di intorni di z_i, e dato che un ultrafiltro è chiuso per intersezione finita si ha la tesi.

8.2 Esercizio 27

Indichiamo con ${}^*X$ un modello non standard di X, costruito con un ultrafiltro $\mathcal{U}$, tale da avere il κ^+-enlargment dove $\kappa = \aleph_\alpha$ è la cardinalità di una base di X.

1. $f : X \to Y$ è continua in $x \iff \xi \sim {}^*x \to {}^*f(\xi) \sim {}^*f({}^*x)$.

2. Siano X, Y due spazi metrici. Osserviamo che il modello non standard $({}^*X, {}^*d)$ di uno spazio metrico (X, d) ammette una distanza non standard ${}^*d : {}^*X^2 \to {}^*\mathbb{R}$. Presi $\xi, \eta \in {}^*X$ diciamo $\xi \sim \eta$ se ${}^*d(\xi, \eta) < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Sia $f : X \to Y$ allora f è uniformemente continua $\iff \xi \sim \eta \to {}^*f(\xi) \sim {}^*f(\eta)$

3. $f : K \to X$ continua con K spazio metrico compatto e X spazio metrico è uniformemente continua

1. $\boxed{\implies}$ Sia V un intorno di $y = f(x)$, vogliamo mostrare che dato $\xi \sim {}^*x$ si ha ${}^*f(\xi) \in {}^*V$. Sia U un intorno di x tale che $f[U] \subset V$. Sia $\xi = [(\xi_i)]$, sia A un insieme di indici che appartiene all'ultrafiltro che testimonia che $\xi \in {}^*U$, cioè tale che per ogni $i \in A$ si ha $x_i \in U$, allora per ogni $i \in A$ si

ha $f(\xi_i) \in V$ dunque ${}^*f(\xi) \in {}^*V$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sia per assurdo f discontinua in x, sia $\{U_i\}_{i\in\omega_\alpha}$ un sistema fondamentale di intorni di x (si può ottenere intersecando una base di X con l'insieme degli intorni di x sostituendo eventualmente l'insieme vuoto con un intorno qualunque). Poiché f è discontinua esiste V intorno di $y = f(x)$ tale che per ogni U intorno di x si ha $f[U] \setminus V \neq \emptyset$. Allora sia per κ^+-enlargment $\eta = [(\eta_i)_{i\in I}] \in {}^*Y$ tale che $\eta \in \bigcap_{i\in\omega_\alpha} {}^*U_i \setminus V$, scegliamo $\xi = [(\xi_i)_{i\in I}]$ con $f(\xi_i) = \eta_i$ dunque, dato che $\eta = {}^*f(\xi) \notin {}^*V$, si ha l'assurdo $\xi \sim {}^*x \wedge {}^*f(\xi) \not\sim {}^*f({}^*x)$.

2. $\boxed{\Longrightarrow}$ Sia $\xi = [(\xi_i)] \sim \eta = [(\eta_i)]$, sia $n \in \mathbb{N}$, vogliamo mostrare che ${}^*f(\eta) \in {}^*B({}^*1/n, f(\xi)) := \{\zeta \in {}^*Y |\, {}^*d({}^*f(\xi), \zeta) < 1/n\}$. Sia per uniforme continuità r tale che $f[B(r,x)] \subset B(1/n, f(x))$. Sia $A \in \mathcal{U}$ un insieme di indici tali che $d(\xi_i, \eta_i) < r$ per ogni $i \in A$, allora per ogni $i \in A$ si ha $d(f(\eta_i), f(\xi_i)) < 1/n$ da cui la tesi.

   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supponiamo per assurdo esista un raggio $R \in \mathbb{R}$ tale per cui esistano $x_n : f[B(1/n, x_n)] \not\subset B(R, f(x_n))$. Dato che per il punto precedente f è continua possiamo assumere gli x_i tutti diversi. Chiamiamo $U_n = B(1/n, x_n)\backslash f^{-1}[B(R, f(x_n))]$ e $E_n = \bigcup_{i\in\mathbb{N}\, i>n}\{x_i\}$. Sia per κ^+-enlargment $\xi = [(\xi_i)] \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} {}^*E_n$. Scegliamo $\eta = [(\eta_i)]$ in modo tale che, se esiste $n \in \mathbb{N} : \xi_i = x_n$, allora $\eta_i \in U_n$. Per disuguaglianza triangolare si ha $d(f(\eta_i), f(\xi_i)) > R$ per quasi tutti gli i, cioè ${}^*f(\eta) \not\sim {}^*f(\xi)$. Tuttavia preso $n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\xi \in {}^*E_n$ cioè per quasi tutti gli i si ha $\xi_i = x_j$ per un certo $j > n$ dipendente da i, allora per costruzione $\eta_i \in U_j$ quindi $d(\xi_i, \eta_i) < 1/j < 1/n$, cioè $\xi \sim \eta$, il che contraddice le ipotesi.

3. Siano $\eta, \xi \in {}^*K$ con $\eta \sim \xi$, vogliamo mostrare ${}^*f(\eta) \sim {}^*f(\xi)$. Per compattezza esistono $x, y \in K : \eta \sim {}^*x \wedge \xi \sim {}^*y$, inoltre poiché per transitività si ha ${}^*x \sim {}^*y$ si deve avere $x = y$. Per continuità dunque ${}^*f(\eta) \sim {}^*f({}^*x) \sim {}^*f(\xi)$.

9 15/11/2023

9.1 Esercizio 28

Dimostrare che esistono (x_n), (y_n) tali che $FS(x_n) \cap FS(y_n) = \emptyset$
Siano $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ e definiamo ricorsivamente $x_{n+1} = \max(FS(y_0, \dots, y_n)) + 1$ e $y_{n+1} = max(FS(y_0, \dots, y_{n+1})) + 1$. Se per assurdo esistesse $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n} = y_{j_1} + \cdots + y_{j_m}$ con $i_1 < \cdots < i_n$, $j_1 < \cdots < j_m$ avremmo per costruzione l'assurdo $i_n \leq j_m \wedge j_m < i_n$.

9.2 Esercizio 29

Dimostrare che $\mathbb{H} = \overline{\{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} \,|\, \mathcal{U} \text{ è idempotente}\}}$
Sicuramente $\mathcal{H}$ è chiuso in quanto un ultrafiltro contenente A che non è un $IP-$set è contenuto nell'aperto $\mathcal{O}_A$ che è diusgiunto da $\mathcal{H}$. Adesso dobbiamo

mostrare che preso $X = \{x_1 < \cdots < x_n < \dots\} \subset \mathbb{N}$ infinito esiste un ultrafiltro idempotente che contiene $FS(X)$. Sia $X_i = \{x_n | n > i\}$ osserviamo che gli insiemi $FS(X_i)$ hanno la FIP dunque $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{X_i}$ è non vuoto e essendo chiuso per somma e topologicamente, dotato della topologia di sottospazio è un semigruppo topologico destro compatto di hausdorff, dunque per il lemma di Ellis contiene un idempotente.

9.3 Esercizio 29

Dimostrare che

1. $\mathcal{U}$ idempotente $\implies k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$ per ogni k.
2. Non esistono idempotenti che contengono i quadrati
3. Sia $\mathcal{U}$ idempotente allora per ogni $A \in 2\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ esistono a, d tali che $a,\, a+d,\, a+2d \in A$
4. $\mathcal{U}$ idempotente se e solo se per ogni $A \in \mathcal{U}$ esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathcal{U}$.
5. $X = (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}) \oplus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ è nowhere dense in $\beta\mathbb{N}$.

1. Mostriamo che il complementare di $k\mathbb{N}$ non può essere un $IP-$set. Sia X infinito, allora $FS(X)$ contiene multipli di k infatti per il principio dei cassetti contiene una quantità infinita di numeri congrui a $h \mod k$, dunque la somma di k di questi numeri produce un numero multiplo di k.
2. Infatti i quadrati non sono $IP-$set.
3. Sia $\mathcal{U}$ idempotente allora per ogni $A \in 2\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ esistono a, d tali che $a,\, a+d,\, a+2d \in A$
4. Se $\mathcal{U}$ è idempotente la tesi è ovvia poiché per ogni $A \in \mathcal{U}$ si ha $\hat{A} := \{n | A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Dimostriamo l'implicazione opposta, sia $A \in \mathcal{U}$, mostriamo che $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$, la tesi segue per massimalità degli ultrafiltri.
5. Osserviamo che X non contiene ultrafiltri principali ma ogni aperto di base (quindi tutti gli aperti) ne contengono almeno uno.

10 20/11/2023

10.1 Esercizio 30

1. $\bar{A} = \mathcal{O}_A$;
2. X clopen se e solo se $X = \mathcal{O}_A$ per qualche A;
3. Sia U un aperto: allora $\bar{U} = \mathcal{O}_{U\cap\mathbb{N}} = \overline{U \cap \mathbb{N}}$: quindi la chiusura di un aperto è ancora un aperto. Un insieme con questa proprietà si dice estremamente disconnesso;

4. U, V aperti: allora $\bar{U} \cap \bar{V} = \overline{U \cap V}$;

5. Se U è intorno di $\mathcal{U}$ allora $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, ma non vale il viceversa;

6. (*) Se $(I_n)_n$ è una famiglia numerabile di intorni di $\mathcal{U}$ non principale, allora $\bigcap I_n$ ha parte interna non vuota (ma in generale non è un intorno di $\mathcal{U}$!).

1. Sia $\mathcal{U} \in \bar{A}$ allora esiste $B \in \mathcal{U}$ tale che esiste $a \in A \cap B$, dunque $a \in \bar{A}$.

2. Essendo X aperto scriviamo $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{A_i}$. Sia $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Se esiste $J \subset I$ finito tale che $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ allora $X = \bigcup_{i \in J} \mathcal{O}_{A_i} = \mathcal{O}_A$. Se non esiste un tale insime finito di indici dimostriamo che X non può essere chiuso. Chiaramente $\mathcal{O}_A$ è la chiusura di X, infatti per ogni $B \in \mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ esiste i tale che $B \cap A_i$ è non vuoto duque $\mathcal{O}_B \cap \mathcal{O}_{A_i}$ è non vuoto. Tuttavia l'insieme $\{A \setminus A_i\}_{i \in I}$ ha la FIP, altrimenti esisterebbe l'insieme J prima menzionato, dunque può essere esteso a un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ il quale non può appartenere a nessun $\mathcal{O}_{A_i}$ per alcun i.

3. Sia U un aperto: allora $\bar{U} = \mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}} = \overline{U \cap \mathbb{N}}$: quindi la chiusura di un aperto è ancora un aperto. Un insieme con questa proprietà si dice estremamente disconnesso;

4. U, V aperti: allora $\bar{U} \cap \bar{V} = \overline{U \cap V}$;

5. Se U è intorno di $\mathcal{U}$ allora $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, ma non vale il viceversa;

6. (*) Se $(I_n)_n$ è una famiglia numerabile di intorni di $\mathcal{U}$ non principale, allora $\bigcap I_n$ ha parte interna non vuota (ma in generale non è un intorno di $\mathcal{U}$!).