UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Laurea Triennale in Matematica

Varietà piatte e Teorema di Bieberbach

Relatore:

Prof. Roberto Frigerio

Candidato:

Valeria Tateo

ANNO ACCADEMICO 2023/2024

Indice

Introduzione **5**

1 Varietà piatte **7**

1.1 Richiami sulle isometrie di $\mathbb{R}^n$ 7

1.1.1 Il gruppo Euclideo 8

1.1.2 Isometrie locali 9

1.2 (X,G)-strutture 10

1.3 Varietà piatte complete 12

1.3.1 Mappa sviluppante 13

1.3.2 Gruppo fondamentale di una varietà piatta 16

2 Il Teorema di Bieberbach **21**

2.1 Gruppi di Lie 21

2.1.1 Forma volume e misura di Haar 22

2.2 Il Lemma di Margulis 23

2.3 Ancora isometrie di $\mathbb{R}^n$ 25

2.4 Gruppi cristallografici 27

3 Superfici compatte localmente isometriche a $\mathbb{R}^2$ **30**

3.1 Isometrie affini di $\mathbb{R}^2$ 30

3.1.1 Isometrie dirette 31

3.1.2 Isometrie inverse 31

3.2 Il toro 32

3.3 La bottiglia di Klein 33

3.4 Classificazione 34

Introduzione

Nel 1910 Bieberbach ha dimostrato che ogni varietà piatta, completa, connessa e compatta è finitamente rivestita da un toro piatto. Una conseguenza importante del Teorema di Bieberbach è la classificazione delle superfici compatte che ammettono una metrica localmente isometrica a $\mathbb{R}^2$: il toro e la bottiglia di Klein. L'obiettivo di questa tesi è fornire un'introduzione al concetto di varietà piatta, dimostrare il Teorema di Bieberbach e classificare le superfici compatte localmente isometriche a $\mathbb{R}^2$.

Nel primo capitolo, dimostriamo che il gruppo $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ è isomorfo al prodotto semidiretto $\mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n)$ e richiamiamo alcune importanti proprietà delle isometrie di $\mathbb{R}^n$. Successivamente spieghiamo cos'è una varietà piatta partendo dalla definizione di $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura e verifichiamo che questa definizione coincide, per varietà connesse, all'essere localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$. Introduciamo poi la mappa sviluppante, che ci dà un'isometria tra le varietà piatte complete, connesse e semplicemente connesse e $\mathbb{R}^n$. Infine dimostriamo il seguente teorema.

Teorema 0.1
Se M è una varietà piatta, completa e connessa, allora $\Pi_1(M)$ si può identificare con un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^n$ in modo che M sia isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n/\Pi_1(M)$.

Nel secondo capitolo, introduciamo alcuni concetti riguardanti i gruppi di Lie e ne studiamo i sottogruppi discreti usando il lemma di Margulis, che dice:

Teorema 0.2 - Lemma di Margulis
Dato G un gruppo di Lie, esiste un intorno U di $e \in G$ tale che ogni sottogruppo discreto $\Gamma < G$ generato da elementi in U è nilpotente.

Dopo aver introdotto i gruppi cristallografici e aver dimostrato che ogni gruppo cristallografico ammette un sottogruppo delle traslazioni T di indice finito e isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, siamo pronti per dimostrare il Teorema di Bieberbach.

Teorema 0.3 - Teorema di Bieberbach
Se M è una varietà piatta, completa, connessa e compatta, allora è finitamente rivestita da un toro piatto.

Infine, nel terzo capitolo, classifichiamo le isometrie affini del piano Euclideo e mostriamo che le superfici compatte localmente isometriche a $\mathbb{R}^2$ sono due: il toro e la bottiglia di Klein.

Capitolo 1

Varietà piatte

In questo capitolo diamo una caratterizzazione delle isometrie di $\mathbb{R}^n$ e ne richiamiamo alcune proprietà. Successivamente introduciamo il concetto di varietà piatta partendo dalla definizione di (X, G)-struttura e studiamo la mappa sviluppante, che ci dà un'isometria tra le varietà piatte, complete, connesse e semplicemente connesse e $\mathbb{R}^n$. Infine dimostriamo che ogni varietà piatta, completa e connessa è il quoziente di $\mathbb{R}^n$ sotto l'azione del suo gruppo fondamentale, che può essere identificato con un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ e che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^n$. Come testi di riferimento consideriamo [1], [2], [5] e [6].

1.1 Richiami sulle isometrie di $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.1
Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'isometria se conserva le distanze, cioè

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n .$$

Osservazione 1.1
Un'isometria è necessariamente iniettiva. Infatti siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che $f(x) = f(y)$, allora $||f(x) - f(y)|| = ||x - y|| = 0$. Quindi $x = y$.

Teorema 1.2
Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono tutte e sole le trasformazioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ del tipo

$$f(x) = Ax + v$$

dove $A \in \mathrm{O}(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Indichiamo con $|| \cdot ||$ e con d la norma e la distanza Euclidea di $\mathbb{R}^n$. Sia f un'applicazione del tipo

$$f(x) = Ax + v$$

dove $A \in \mathrm{O}(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$d(f(x), f(y)) = ||f(x) - f(y)|| = ||A(x - y)|| = ||x - y|| = d(x, y)$$

e quindi f è un'isometria di $\mathbb{R}^n$.
Viceversa, sia f un'isometria. Basta verificare che l'applicazione $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ così definita:

$$A(x) = Ax = f(x) - f(0)$$

è una trasformazione ortogonale. Poiché f è un'isometria, f conserva le distanze e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha:

$$||Ax|| = ||f(x) - f(0)|| = d(f(x), f(0)) = d(x, 0) = ||x - 0|| = ||x||.$$

Inoltre

$$\begin{gathered} ||Ax - Ay|| = ||f(x) - f(y)|| = d(f(x), f(y)) = d(x, y) = ||x - y|| \\ ||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2\langle x, y\rangle \\ ||Ax - Ay||^2 = ||Ax||^2 + ||Ay||^2 - 2\langle Ax, Ay\rangle. \end{gathered}$$

Quindi

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle.$$

Sia ora $\{e_1, ..., e_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, poiché A conserva il prodotto scalare anche $\{Ae_1, ..., Ae_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Quindi l'applicazione A è lineare in quanto per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, si ha:

$$Ax = \textstyle\sum_i \langle Ax, Ae_i\rangle Ae_i = \sum_i \langle x, e_i\rangle Ae_i = \sum_i x_i Ae_i.$$

□

1.1.1 Il gruppo Euclideo

Sia

$$\mathrm{E}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in \mathrm{O}(n), v \in \mathbb{R}^n \right\},$$

$\mathrm{E}(n)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Gl}(n+1, \mathbb{R})$ e viene detto **gruppo Euclideo**. $\mathrm{E}(n)$ è un gruppo rispetto al prodotto:

$$\begin{pmatrix} A' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'A & A'v + v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposizione 1.3
$\mathrm{E}(n)$ *è isomorfo a* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. $\mathrm{E}(n)$ agisce su $\mathbb{R}^n$, quando $\mathbb{R}^n$ è identificato con $\{(x, 1) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n\}$, in questo modo:

$$\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Osservo che se $f, f' \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema 1.2 si ha $f(x) = Ax + v$ e $f'(x) = A'x + v'$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, dunque

$$f' \circ f(x) = A'Ax + A'v + v'.$$

Pertanto, la corrispondenza

$$\phi : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{E}(n), \quad f \mapsto \phi(f) = \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di gruppi. □

Proposizione 1.4
Il gruppo Euclideo $\mathrm{E}(n)$ *è isomorfo al prodotto semidiretto* $\mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{O}(n)$*, dove* α *denota l'azione naturale di* $\mathrm{O}(n)$ *su* $\mathbb{R}^n$*:*

$$\forall A \in \mathrm{O}(n), \quad \alpha_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ v \mapsto Av.$$

Dimostrazione. Per ogni $A \in \mathrm{O}(n)$, α_A è un automorfismo e

$$\alpha_{AA'} = \alpha_A \circ \alpha_{A'} \qquad \forall A, A' \in \mathrm{O}(n).$$

Il prodotto semidiretto $\mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{O}(n)$ è definito nel seguente modo:

$$\begin{gathered} \forall\ (v, A),\ (v', A') \in \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{O}(n): \\ (v, A) \cdot (v', A') = (v + \alpha_A v', AA'). \end{gathered}$$

Allora, l'applicazione

$$\begin{gathered} \psi : \mathrm{E}(n) \to \mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{O}(n) \\ \begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (v, A) \end{gathered}$$

soddisfa:

$$\psi\left(\begin{pmatrix} A & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & v' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} AA' & Av' + v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (Av' + v, AA').$$

Pertanto, ψ induce un isomorfismo tra $\mathrm{E}(n)$ e $\mathbb{R}^n \rtimes_\alpha \mathrm{O}(n)$. □

1.1.2 Isometrie locali

In questa sezione studiamo alcune proprietà delle isometrie locali di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.5
Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un'isometria locale se ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ha un intorno aperto U_x tale che $f|_{U_x}$ è un'isometria sull'immagine.

Proposizione 1.6
Siano ϕ_1*,* ϕ_2 *due isometrie di* $\mathbb{R}^n$ *che coincidono su un aperto non vuoto* W*, allora* $\phi_1 = \phi_2$*.*

Dimostrazione. Poiché ϕ_1 e ϕ_2 coincidono su W aperto, per ogni $x \in W$ si ha $d_x\phi_1 = d_x\phi_2$. L'insieme

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_1(x) = \phi_2(x),\ d_x\phi_1 = d_x\phi_2\}$$

è chiuso e contiene $y \in W$, dunque basta mostrare che S è aperto per concludere la dimostrazione. Sia $x \in S$; le immagini di ϕ_1 e ϕ_2 sono aperti in $\mathbb{R}^n$; segue che esistono un intorno aperto V di $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ e due intorni aperti U_1, U_2 di x tali che $\phi_i : U_i \to V$ è un'isometria surgettiva per $i = 1, 2$. Sia $U \subseteq U_1$ un intorno di x e sia $f = (\phi_2|_{U_2})^{-1} \circ (\phi_1|_{U_1})$; f è un'isometria da U_1 a U_2, $f(x) = x$ e $d_x f = I$. Sia γ un segmento in U tale che $\gamma(0) = x$, allora $f \circ \gamma$ è un segmento in $f(U)$ tale che $f \circ \gamma(0) = f(x) = x$. Inoltre

$$(f \circ \gamma)'(0) = d_x f(\gamma'(0)) = \gamma'(0)$$

dunque $f \circ \gamma = \gamma$, che implica che $f \circ \gamma(t) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [0, 1]$, e quindi che $f|_U = id$. Abbiamo verificato che $\phi_1|_U = \phi_2|_U$, cioè che $U \subset S$, da cui la tesi. □

Proposizione 1.7
Sia $\varphi : U_1 \to U_2$ un'isometria tra aperti di $\mathbb{R}^n$, allora φ si estende ad un'isometria globale di $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. A meno di traslazioni, possiamo supporre che $0 \in U_1$ e $\varphi(0) = 0$. Poiché U_1 è aperto, esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che $B_{\epsilon_0}(0) \subset U_1 \subset \mathbb{R}^n$. Per ogni $i = 1, ..., n$, consideriamo i vettori x_i tali che:

$$(x_i)_j = \begin{cases} \epsilon \text{ per } i = j \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

con $0 < \epsilon < \epsilon_0$. Chiaramente gli x_i sono ortogonali. Allora anche $\varphi(x_i)$ sono vettori ortogonali e di lunghezza ϵ. Osserviamo che esiste un'unica mappa lineare ortogonale $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_i) = \varphi(x_i)$ per ogni $i = 1, .., n$. Resta da mostrare che per ogni $y \in U_1$, $f(y) = \varphi(y)$. Poiché φ è un'isometria,

$$\langle \varphi(y), \varphi(x_i) \rangle = \langle y, x_i \rangle$$

(si veda la dimostrazione del Teorema 1.2).
Per costruzione, $y = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\epsilon^2} \langle y, x_i \rangle x_i$ e $\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\epsilon^2} \langle \varphi(y), \varphi(x_i) \rangle \varphi(x_i)$, che ci mostra che $\varphi(y) = f(y)$. □

Osservazione 1.2
Osserviamo che l'isometria descritta nella Proposizione 1.7 è unica e ciò segue dalla Proposizione 1.6.

1.2 (X,G)-strutture

Sia X una varietà connessa, semplicemente connessa, orientata, di dimensione n e sia G un gruppo di diffeomorfismi di X su se stessa; diciamo che una n-varietà differenziabile M è dotata di una (X, G)-struttura se sono dati un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di M e un insieme di mappe aperte differenziabili $\{\varphi_i\}$ (con $\varphi_i : U_i \to X$) tali che

1. $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i)$ è un diffeomorfismo;
2. se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, allora la restrizione di $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ad ogni componente connessa di $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ è la restrizione di un elemento di G.

La collezione $\{(U_i, \varphi_i)\}$ è chiamata **atlante** che definisce la (X, G)-struttura ed è contenuto in un unico atlante massimale che gode delle stesse proprietà.

Definizione 1.8 - Varietà piatta
Sia M una (X, G)-varietà di dimensione n. Allora M si dice **piatta** se $X = \mathbb{R}^n$ e $G = \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$.

Proposizione 1.9
Per una varietà connessa la definizione appena data coincide con l'essere localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Supponiamo M sia una $(\mathbb{R}^n, \text{Isom}(\mathbb{R}^n))$-varietà connessa. La tesi equivale a mostrare che esiste una distanza su M che la renda localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$. Sia $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlante che definisce la $(\mathbb{R}^n, \text{Isom}(\mathbb{R}^n))$-varietà e consideriamo $x, y \in U_i$. Definiamo

$$d(x, y) = d(\varphi_i(x), \varphi_i(y)).$$

Notiamo che si tratta di una buona definizione, infatti se $x, y \in U_i \cap U_j$ allora

$$d(x, y) = d(\varphi_i(x), \varphi_i(y)) = d(\varphi_j(x), \varphi_j(y))$$

in quanto $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ è la restrizione di un'isometria.
Siano adesso $x, y \in M$ tali che $x \in U_i$ e $y \in U_j$ con $i \neq j$ e sia $\gamma : [0, 1] \to M$ una curva tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Consideriamo una partizione $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_{n+1} = 1$ di $[0, 1]$ tale che per ogni $i = 0, ..., n$

$$\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \subset U_k$$

per qualche k.
Definiamo la lunghezza di γ

$$L(\gamma) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} L(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}) = \sum_{i=0}^{n} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

A questo punto

$$d(x, y) = \inf_\gamma L(\gamma)$$

per ogni curva γ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.
Viceversa, sia M una varietà localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$: per ogni $x \in M$ esiste una intorno U_x di x tale che U_x è isometrico a una palla di $\mathbb{R}^n$; chiamiamo φ_x l'isometria. Osservo che $\{U_x\}_{x \in M}$ è un ricoprimento aperto di M e $\{\varphi_x\}_{x \in M}$ è un insieme di mappe aperte differenziabili. Inoltre:

1. $\varphi_x : U_x \to \varphi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo;
2. se $U_x \cap U_y \neq \emptyset$, allora la restrizione di $\varphi_x \circ \varphi_y^{-1}$ ad ogni componente connessa di $\varphi_y(U_x \cap U_y)$ è un'isometria tra aperti di $\mathbb{R}^n$. Quindi per la Proposizione 1.7 è la restrizione di un'isometria globale di $\mathbb{R}^n$.

Dunque $\{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in M}$ definisce una $(\mathbb{R}^n, \text{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura su M. □

Osservazione 1.3
La seconda implicazione vale in generale, senza l'ipotesi che la varietà sia connessa.

Da ora in poi considereremo solo varietà connesse.

Definizione 1.10
Data una varietà connessa M, chiamiamo **geodetica** una curva $\gamma : I \to M$ con velocità costante che realizza localmente la distanza.

Una geodetica $\gamma : I \to M$ si dice massimale se non può essere estesa ad una geodetica su un intervallo strettamente più grande $J \supset I$.

Teorema 1.11
Sia $p \in M$ un punto e $v \in T_pM$ un vettore tangente. Allora esiste un'unica geodetica massimale $\gamma : I \to M$ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. L'intervallo I è aperto e contiene 0.

Esempio 1.4 - Toro
Il toro ha una metrica piatta che deriva dal rivestimento $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$, infatti $\mathbb{Z}^2$ agisce su $\mathbb{R}^2$ per traslazione e le traslazioni sono isometrie. Sia x un punto del toro e sia U un intorno aperto connesso di x tale che $p^{-1}(U)$ sia un aperto saturo. In questo modo, p è un'isometria tra una qualsiasi componente connessa di $p^{-1}(U)$ e U. Questo esempio si generalizza anche per tori n-dimensionali.

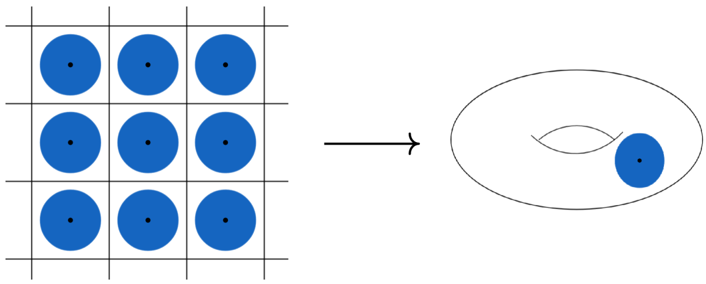

Fig 1.1: Metrica piatta del toro

1.3 Varietà piatte complete

Ogni varietà piatta connessa è anche uno spazio metrico con la distanza definita nella Proposizione 1.9 e può essere completa o no. La completezza di una varietà piatta può essere espressa in vari modi equivalenti:

Teorema 1.12 - Hopf - Rinow per varietà piatte
Sia M una varietà piatta connessa. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- *M è completa;*
- *un sottoinsieme di M è compatto se e solo se è chiuso e limitato;*
- *ogni geodetica è estendibile su tutto $\mathbb{R}$.*

1.3.1 Mappa sviluppante

In questa sezione dimostriamo che ogni varietà piatta completa, connessa e semplicemente connessa è isometrica a $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.13
Sia M una varietà piatta completa e sia $p \in M$ un punto. La **mappa esponenziale**

$$\exp_p : T_pM \to M$$

è definita come segue. Dato un vettore $v \in T_pM$ determina una geodetica massimale $\gamma_v : \mathbb{R} \to M$ con $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$, poniamo $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$.

Proposizione 1.14
Sia M una varietà piatta, connessa e semplicemente connessa e sia $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{R}^n$ un'isometria definita su U_0, aperto connesso non vuoto di M; allora esiste un'unica isometria locale $D : M \to \mathbb{R}^n$ che estende φ_0.

Dimostrazione. Unicità) Se D_1 e D_2 sono due isometrie locali che estendono φ_0, allora D_1 e D_2 coincidono su U_0 che è un aperto non vuoto di M. Quindi per ogni $x \in U_0$ si ha che $d_xD_1 = d_xD_2$. L'insieme

$$S = \{x \in M : D_1(x) = D_2(x),\ d_xD_1 = d_xD_2\}$$

è chiuso e contiene $y \in U_0$, dunque basta mostrare che S è aperto per concludere la dimostrazione. Sia $x \in S$; le immagini di D_1 e D_2 sono aperti in $\mathbb{R}^n$; segue che esistono un intorno aperto V di $D_1(x) = D_2(x)$ e due intorni aperti U_1, U_2 di x tali che $D_i : U_i \to V$ è un'isometria surgettiva per $i = 1, 2$. Sia $U \subseteq U_1$ un intorno di x e sia $p : T_xM \supset W \to U$ la restrizione della mappa esponenziale. Poniamo $f = (D_2|_{U_2})^{-1} \circ (D_1|_{U_1})$; f è un'isometria da U_1 a U_2, $f(x) = x$ e $d_xf = I$. Sia γ un arco di geodetica in U tale che $\gamma(0) = x$, allora $f \circ \gamma$ è un arco di geodetica in $f(U)$ tale che $f \circ \gamma(0) = f(x) = x$. Inoltre

$$(f \circ \gamma)'(0) = d_xf(\gamma'(0)) = \gamma'(0)$$

dunque $f \circ \gamma = \gamma$, che implica che $f \circ p = p$, e quindi che $f|_U = id$. Abbiamo verificato che $D_1|_U = D_2|_U$, cioè che $U \subset S$, da cui la tesi.
Esistenza) Fissiamo un punto p_0 in U_0; se p è un punto arbitrario di M, esiste un cammino differenziabile $\gamma : [0, 1] \to M$ con $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = p$; supponiamo $\gamma^{-1}(U_0)$ sia un intervallo. Se $L = \gamma([0, 1])$, esiste un sottoinsieme $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1,...,m}$ dell'atlante massimale che definisce la $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura tale che:

1. $\gamma^{-1}(U_i) = I_i$ è un intervallo per $i = 1, ..., m$ (lo abbiamo supposto anche per $i = 0$);

2. $L \subset \bigcup_{i=0}^m U_i$;

3. $I_i \cap I_j = \emptyset$ se $|i - j| \geq 2$;

4. $U_i \cap U_j$ è connesso per ogni $i, j = 0, ..., m$.

Ora, sia $g_i \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ un'isometria di $\mathbb{R}^n$ che estende $\varphi_i \circ \varphi_{i-1}^{-1}$; definiamo D su L nel seguente modo:

- $D|_{U_0 \cap L} = \varphi_0|_L$
- $D|_{U_1 \cap L} = g_1^{-1} \circ (\varphi_1|_L)$
- (...)
- $D|_{U_m \cap L} = g_1^{-1} \circ ... \circ g_m^{-1} \circ (\varphi_m|_L)$.

(La definizione coincide sulle intersezioni). Questo metodo ci permette di definire $D(p)$; dimostreremo che:

a. $D(p)$ non dipende da $U_1, ..., U_m$;

b. $D(p)$ non dipende da γ.

Fatto ciò, la dimostrazione sarà conclusa dal momento che D estende ovviamente φ_0 e in un intorno del punto p può essere scritta come $g_1^{-1} \circ ... \circ g_m^{-1} \circ \varphi_m$ che implica che è un'isometria locale.

(a) É sufficiente considerare il caso in cui si hanno due ricoprimenti di L del tipo $\{U_0, U_1\}$ e $\{U_0, \tilde{U_1}\}$ (la tesi segue per induzione); per semplicità supponiamo anche che $U_1 \cap \tilde{U_1}$ sia connesso. Dal momento che $U_0 \cap U_1 \cap \tilde{U_1} \neq \emptyset$, se $g \in G$ è un'isometria che estende $\varphi_1 \circ \tilde{\varphi_1}^{-1}$, si ha che $g = g_1 \circ \tilde{g_1}^{-1}$; dunque abbiamo:

- $D|_{U_1 \cap \tilde{U_1} \cap L} = g_1^{-1} \circ \varphi_1|_{U_1 \cap \tilde{U_1} \cap L}$
- $\tilde{D}|_{U_1 \cap \tilde{U_1} \cap L} = \tilde{g_1}^{-1} \circ \tilde{\varphi_1}|_{U_1 \cap \tilde{U_1} \cap L} = g_1^{-1} \circ g \circ \tilde{\varphi_1}|_{U_1 \cap \tilde{U_1} \cap L} = g_1^{-1} \circ \varphi_1|_{U_1 \cap \tilde{U_1} \cap L}$
- $D|_{U_0 \cap L} = \tilde{D}|_{U_0 \cap L} = \varphi_0|_{U_0 \cap L}$.

Segue che $D = \tilde{D}$ su L, e in particolare in p.
(b) Siano γ_0 e γ_1 due cammini differenziabili che congiungono p_0 a p e sia H un'omotopia differenziabile tra γ_0 e γ_1. Consideriamo due suddivisioni di [0,1]

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_\nu = 1, \quad 0 = s_0 \leq s_1 \leq ... \leq s_\mu = 1$$

in modo tale che per ogni i, j l'insieme $H([t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j])$ è contenuto in un insieme di coordinate dell'atlante massimale che definisce la $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura. Quindi possiamo immaginare che γ_0 sia ottenuto da γ_1 step by step come in figura.

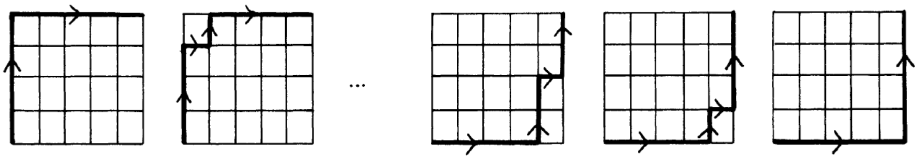

Fig 1.2: modifiche step by step da γ_1 a γ_0

Ora è chiaro dalla scelta dei t_i e degli s_j che la definizione di $D(p)$ rimane inalterata ad ogni passaggio.

□

La mappa descritta nella Proposizione 1.14 è chiamata **mappa sviluppante** di M rispetto a φ_0.

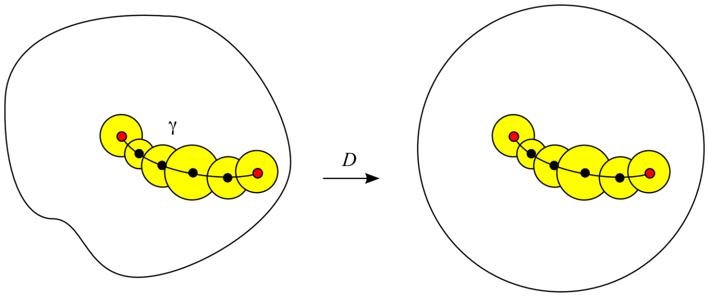

Fig 1.3: Mappa sviluppante

Osservazione 1.5
Se D e D' sono mappe sviluppanti di una varietà piatta M, allora esiste $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ tale che $D = g \circ D'$.

Dimostrazione. Sia $U \subset M$ aperto, connesso, sufficientemente piccolo tale che $D|_U$ e $D'|_U$ sono entrambe isometrie; allora $D|_U \circ (D'|_U)^{-1}$ è la restrizione di un elemento $g \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Poiché $g \circ D'$ è la mappa sviluppante di M rispetto a $D|_U$, allora coincide con D. $\square$

> **Teorema 1.15**
> *Ogni varietà piatta, completa, connessa e semplicemente connessa è isometricamente diffeomorfa a* $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia M la varietà considerata. Sia D una mappa sviluppante di M. É sufficiente verificare che D gode della seguente proprietà:

$$\forall x \in D(M),\ \tilde{x} \in D^{-1}(x),\ \gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n) \text{ con } \gamma(0) = x$$
$$\exists!\ \tilde{\gamma} \in C^1([0,1], M) \text{ con } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{x},\ D \circ \tilde{\gamma} = \gamma$$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "D"] \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"'] & D(M) \subset \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{x} \arrow[d, mapsto] \\ 0 \arrow[ur, dashed, mapsto] \arrow[r, mapsto] & x \end{tikzcd}$$

Infatti, se la proprietà vale, cammini C^1 in $\mathbb{R}^n$ che partono in $D(M)$ si sollevano (tramite D) in modo unico a cammini C^1 in M. Allo stesso modo, omotopie C^1 di cammini chiusi che partono in $D(M)$ si sollevano in modo unico ad omotopie C^1. Segue quindi che se $D(x) = D(x')$ e γ è un cammino C^1 in M che congiunge x a x' (quindi $D \circ \gamma$ è un loop), allora esiste un'omotopia C^1 H tra $D \circ \gamma$ e il loop costante $D(x)$. Dal momento che H si solleva ad M, il loop costante $D(x)$ si solleva ad x e il loop $D \circ \gamma$ si solleva a γ, otteniamo che γ è un loop, cioè che $x = x'$. Abbiamo mostrato che D è iniettiva; la proprietà implica anche che D è surgettiva e quindi D è un diffeomorfismo isometrico tra M e $\mathbb{R}^n$.
Dimostriamo ora la proprietà. Fissiamo x, $\tilde{x}$ e γ e osserviamo che se per $0 < t \leq 1$ esiste $\tilde{\gamma}^{(t)} \in C^1([0,t], M)$ tale che $\tilde{\gamma}^{(t)}(0) = \tilde{x}$ e $D \circ \tilde{\gamma}^{(t)} = \gamma|_{[0,t]}$, allora $\tilde{\gamma}^{(t)}$ è unica (D è un'isometria locale); in particolare se $\tilde{\gamma}^{(t_1)}$ e $\tilde{\gamma}^{(t_2)}$ sono definite per $t_1 < t_2$ allora $\tilde{\gamma}^{(t_2)}|_{[0,t_1]} = \tilde{\gamma}^{(t_1)}$. Sia

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] : \text{esiste } \tilde{\gamma} \in C^1([0,t], M) \text{ tale che } \tilde{\gamma}(0) = \tilde{x},\ D \circ \tilde{\gamma} = \gamma|_{[0,t]}\}.$$

Poiché D è un'isometria locale, $t_0 > 0$. Quindi resta da verificare che $t_0 = 1$. Basta verificare che t_0 è un massimo, infatti, poiché D è un'isometria in un intorno di $\tilde{\gamma}(t_0)$, allora necessariamente $t_0 = 1$. Vogliamo dimostrare che se $\{t_n\}$ è una successione crescente che converge a t_0, allora $\{\tilde{\gamma}(t_n)\}$ è una successione di Cauchy in M. Se per assurdo $\{\tilde{\gamma}(t_n)\}$ non fosse una successione di Cauchy, allora esisterebbe $\epsilon > 0$ tale che per ogni n_0 esisterebbero $n, m \geq n_0$ con $d(\tilde{\gamma}(t_n), \tilde{\gamma}(t_m)) \geq \epsilon$. In particolare, $\tilde{\gamma}$ avrebbe lunghezza infinita e questo è un assurdo. Infatti, esiste una successione $\{I_j\}$ di intervalli tali che $[0, t_0)$ è l'unione disgiunta degli I_j e

$$\tilde{\gamma}|_{I_j} = (D|_{U_j})^{-1} \circ \gamma|_{I_j}$$

dove U_j è un aperto sul quale D è un'isometria. Allora abbiamo che

$$L(\tilde{\gamma}) = \sum_j \int_{I_j} ||\dot{\tilde{\gamma}}(s)||ds = \sum_j \int_{I_j} ||\dot{\gamma}(s)||ds = L(\gamma|_{[0,t_0)}) \leq L(\gamma) < \infty.$$

Quindi $\tilde{\gamma}(t_0) = \lim \tilde{\gamma}(t_n)$. Poiché $\tilde{\gamma}$ è il sollevamento di γ su $[0, t_0]$, allora è differenziabile anche in t_0. Ciò implica che t_0 è un massimo. □

1.3.2 Gruppo fondamentale di una varietà piatta

In questa sezione dimostriamo che ogni varietà piatta, completa e connessa M è il quoziente di $\mathbb{R}^n$ sotto l'azione del suo gruppo fondamentale $\Pi_1(M)$, che può essere identificato con un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ e che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.6
Per la Proposizione 1.3 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ è isomorfo a $\mathrm{E}(n) \subset \mathrm{Gl}(n+1)$, quindi eredita la topologia Euclidea. Quando parliamo di sottogruppo discreto intendiamo sempre rispetto a questa topologia.

Definizione 1.16
Sia T uno spazio topologico di Hausdorff e localmente compatto e sia Γ un gruppo di omeomorfismi di T, Γ agisce:

- **liberamente** se $\gamma \in \Gamma$, $x \in T$ e $\gamma(x) = x$ implica $\gamma = id$;
- in maniera **propriamente discontinua** se per ogni coppia H, K di sottoinsiemi di T compatti, l'insieme $\Gamma(K, H) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap H \neq \emptyset\}$ è finito.

Proposizione 1.17
Sia T uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e localmente compatto e sia Γ un gruppo di omeomorfismi di T. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. *Γ agisce liberamente e in maniera propriamente discontinua su T;*
2. *T/Γ è uno spazio di Hausdorff e dato $x \in T$ esiste un intorno U di x tale che $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ per ogni $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$;*
3. *T/Γ è uno spazio di Hausdorff e la proiezione al quoziente $\pi : T \to T/\Gamma$ è un rivestimento.*

> *Inoltre se $T = \mathbb{R}^n$ e Γ è un sottogruppo $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$, allora anche la seguente condizione è equivalente alle precedenti:*
>
> *4. Γ agisce in maniera libera su T ed è un sottoinsieme discreto di $\mathrm{Isom}(T)$.*

Dimostrazione. Mostriamo (1) $\iff$ (2), (2) $\iff$ (3), (4) $\implies$ (2) e (1) $\implies$ (4).
(1) $\implies$ (2)
Fissiamo $x \in T$, sia V un intorno di x tale che $\overline{V}$ è compatto e poniamo

$$\Gamma(V, V) = \{id, \gamma_1, ..., \gamma_k\}.$$

Sia W un altro intorno di x con chiusura compatta e tale che $\overline{W}$ non contiene $\gamma_i^{-1}(x)$ per ogni i. Tale intorno esiste perché T è di Hausdorff e Γ agisce liberamente. Se prendiamo

$$U = W \setminus \bigcup_{i=1}^k \gamma_i(\overline{W})$$

si ha che $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ per ogni $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$.
Adesso mostriamo che T/Γ è uno spazio di Hausdorff. Se $x, y \in T$ sono tali che $\pi(x) \neq \pi(y)$, o equivalentemente $y \notin \Gamma(x)$, prendiamo due intorni $A \ni x$ e $B \ni y$ che hanno chiusura compatta. La finitezza di $\Gamma(A, B)$ e il fatto che T sia Hausdorff implicano che esistono altri due intorni $A' \subset A$ e $B' \subset B$ tali che $\Gamma(A') \cap B' = \emptyset$, e quindi $\pi(A')$ e $\pi(B')$ sono intorni disgiunti di $\pi(x)$ e $\pi(y)$.
(2) $\implies$ (1)
É chiaro che l'azione è libera. La dimostrazione che l'azione è propriamente discontinua segue dalla definizione di compattezza. Ci possiamo ricondurre al caso in cu H e K sono insiemi compatti tali che esistono intorni aperti $U \supset H$ e $V \supset K$ tali che

$$U \cap \gamma(U) = V \cap \gamma(V) = \emptyset \ \forall \gamma \neq id.$$

L'insieme $C = \{\gamma(H) \cap K : \gamma \in \Gamma(H, K)\}$ è costituito da coppie di sottoinsiemi di K chiusi, non vuoti e disgiunti. Osserviamo che

$$\pi(\Gamma(H) \cap K) = \pi(H) \cap K$$

quindi $\pi(\Gamma(H) \cap K)$ è compatto; dal momento che T/Γ è di Hausdorff allora $\pi(\Gamma(H) \cap K)$ è chiuso, quindi $\pi^{-1}(\pi(\Gamma(H) \cap K))$ è chiuso e dunque

$$\pi^{-1}(\pi(\Gamma(H) \cap K)) \cap K = \Gamma(H) \cap K$$

è anch'esso chiuso. Segue che l'unione di tutti gli elementi di C è chiusa e la compattezza di K implica che C è finito, quindi $\Gamma(H, K)$ è anch'esso finito.
(2) $\implies$ (3)
Sia $y \in T/\Gamma$ e sia $x \in T$ tale che $\pi(x) = y$, esiste sempre perché π è surgettiva. Sia V un intorno aperto di x tale che $\gamma(V) \cap V = \emptyset$ per ogni $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$. Considero $U = \pi(V)$. Osservo che U è aperto di T/Γ perché π è aperta.
Mostriamo che U è ben rivestito. Osserviamo che

$$\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(V)$$

dove $\gamma(V)$ è aperto per ogni $\gamma \in \Gamma$ perché γ è un omeomorfismo e V è aperto. Supponiamo per assurdo esistano $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ con $\gamma \neq \gamma'$ tali che $\gamma(V) \cap \gamma'(V) \neq \emptyset$, cioè $V \cap \gamma^{-1}(\gamma'(V)) \neq \emptyset$. Per ipotesi $\gamma^{-1} \circ \gamma' = id$, cioè $\gamma = \gamma'$, il che è assurdo.
Resta da mostrare che $\pi|_{\gamma(V)}$ è un omeomorfismo su U. Sappiamo che la mappa $\pi|_{\gamma(V)}$ è continua e aperta perché è la restrizione, ad un aperto, di π che è continua e aperta. Dimostriamo che è una bigezione:

- iniettiva: siano $y_1, y_2 \in \gamma(V)$. Supponiamo $\pi|_{\gamma(V)}(y_1) = \pi|_{\gamma(V)}(y_2)$. Quindi esiste $h \in \Gamma$ tale che $hy_1 = y_2$. Dunque
$$h \circ \gamma(V) \ni hy_1 = y_2 \in \gamma(V).$$
Ma siccome i $\gamma(V)$ sono disgiunti si ha che $h \circ \gamma = \gamma$ e quindi $h = id$, da cui $y_1 = y_2$.
- surgettiva: siccome $U = \pi(V)$, allora per ogni $y \in U$ esiste $x \in V$ tale che $\pi(x) = y$. Per definizione di π, abbiamo $\pi(\gamma(x)) = \pi(x) = y$ per ogni $\gamma \in \Gamma$. Quindi $\gamma(x) \in \gamma(V)$ è preimmagine di y per $\pi|_{\gamma(V)}$, che implica che $\pi|_{\gamma(V)}$ è surgettiva.

(3) $\implies$ (2)
Sia $x \in T$ e consideriamo $\pi(x) \in T/\Gamma$. Poiché π è un rivestimento, sia V intorno ben rivestito di $\pi(x)$. Dunque
$$\pi^{-1}(V) = \textstyle\bigsqcup_{i \in I} W_i$$
con $W_i \subset T$ aperti disgiunti e $\pi|_{W_i} : W_i \to V$ omeomorfismo per ogni $i \in I$. Sia $i_0 \in I$ tale che $x \in W_{i_0}$. Dato $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$, $\gamma(W_{i_0})$ deve essere disgiunto da W_{i_0} altrimenti $\pi|_{W_{i_0}}$ non sarebbe iniettiva. Quindi W_{i_0} è l'intorno aperto di x cercato.
(4) $\implies$ (2)
Mostriamo che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste un intorno U di x tale che $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ per ogni $\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}$. Supponiamo per assurdo esista $x \in \mathbb{R}^n$ e una successione $\{\gamma_n\} \subset \Gamma \setminus \{id\}$ tale che $\gamma_n(x) \to x$. Sia $r > 0$ e consideriamo le palle chiuse $\overline{B_r(x)}$ e $\overline{B_{2r}(x)}$ in $\mathbb{R}^n$. Per $y \in \overline{B_r(x)}$ abbiamo
$$d(\gamma_n(y), x) \leq d(\gamma_n(y), \gamma_n(x)) + d(\gamma_n(x), x) = d(y, x) + d(\gamma_n(x), x) \leq r + d(\gamma_n(x), x) \to r.$$
Quindi, per n abbastanza grande abbiamo
$$\gamma_n(\overline{B_r(x)}) \subset \overline{B_{2r}(x)}.$$
Ora osserviamo che il sottoinsieme di $\mathrm{Gl}(n+1)$
$$\{A \in \mathrm{Gl}(n+1) : \det A = \pm 1,\ A(\overline{B_r(x)}) \subset \overline{B_{2r}(x)}\}$$
è compatto (ricordiamo che per la Proposizione 1.3 $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ è isomorfo a $\mathrm{E}(n)$). Per costruzione questo sottoinsieme di $\mathrm{Gl}(n+1)$ contiene tutte le γ_n per n sufficientemente grande. Dal momento che $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ è chiuso in $\mathrm{Gl}(n+1)$, abbiamo che Γ è discreto in $\mathrm{Gl}(n+1)$, allora la successione $\{\gamma_n\}$ contiene solo un numero finito di isometrie distinte. Questo implica che per n abbastanza grande $\gamma_n(x) = x$, il che è assurdo.
Mostriamo che T/Γ è di Hausdorff. Siano $x, y \in T$, $y \notin \Gamma(x)$. Dal momento che $\Gamma(x)$ è discreto, abbiamo che esiste $\epsilon > 0$ tale che $d(\Gamma(x), y) \geq 2\epsilon > 0$. Possiamo prendere ϵ piccolo abbastanza tale che

$$B_\epsilon(x) \cap \gamma(B_\epsilon(x)) = B_\epsilon(y) \cap \gamma(B_\epsilon(y)) = \emptyset$$

per ogni $\gamma \neq id$. Dal momento che Γ è un gruppo di isometrie, abbiamo che

$$B_\epsilon(y) \cap \gamma(B_\epsilon(x)) = \emptyset$$

per ogni $\gamma \in \Gamma$ e la condizione segue direttamente.
(1) $\implies$ (4)
Consideriamo un insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ che generi $\mathbb{R}^n$, e sia $H \subset \mathbb{R}^n$ un altro sottoinsieme compatto tale che $K \subset int(H)$. Allora

$$\{A \in \mathrm{Gl}(n+1) : A(K) \subset H\}$$

è un intorno dell'identità in $\mathrm{Gl}(n+1)$. Dunque

$$\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \subset H\}$$

è un intorno dell'identità in Γ, ma è contenuto in $\Gamma(K, H)$ ed è quindi finito. Perciò Γ è discreto. □

Siamo quindi pronti per dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.18
Se M è una varietà piatta, completa e connessa, allora $\Pi_1(M)$ si può identificare con un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^n$ in modo che M sia isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n/\Pi_1(M)$.

Dimostrazione. Consideriamo il rivestimento universale $p : \tilde{M} \to M$. Osserviamo che $\tilde{M}$ è dotata in maniera naturale di una $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura. Inoltre $\tilde{M}$ è completa. Sia $\gamma \subset \tilde{M}$ una geodetica tale che $\gamma(0) = x$. Poiché p è un'isometria locale, $p \circ \gamma$ vive in M e quindi, per il Teorema di Hopf-Rinow 1.12, esiste per ogni t. L'unico sollevamento di $p \circ \gamma$ che coincide inizialmente con γ è una geodetica che esiste per ogni t e dà un'estensione di γ. Dunque, per il Teorema di Hopf-Rinow 1.12, $\tilde{M}$ è completa. Per definizione di rivestimento universale $\tilde{M}$ è semplicemente connessa e quindi, per il Teorema 1.15, $\tilde{M}$ è isometricamente diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Ora poiché p è un rivestimento regolare, abbiamo che

$$\mathrm{Aut}(p) = \Pi_1(M)/p_*(\Pi_1(\tilde{M})) = \Pi_1(M)/p_*(\{e\}) = \Pi_1(M).$$

Si ha quindi che M è isometricamente diffeomorfa al quoziente $\mathbb{R}^n/\Pi_1(M)$ e, poiché p è un'isometria locale, $\Pi_1(M)$ è un sottogruppo di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, $\Pi_1(M)$ agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^n$. Quindi, per la Proposizione 1.17, $\Pi_1(M)$ è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. □

Capitolo 2

Il Teorema di Bieberbach

In questo capitolo enunciamo e dimostriamo il Teorema di Bieberbach, che mostra che ogni varietà piatta, completa, connessa e compatta è finitamente rivestita da un toro piatto; per farlo, introduciamo alcuni concetti riguardanti i gruppi di Lie e ne studiamo i sottogruppi discreti usando il Lemma di Margulis. Come testi di riferimento consideriamo [2], [3] e [4].

2.1 Gruppi di Lie

Definizione 2.1
Un gruppo di Lie è una varietà liscia G che ammette una struttura di gruppo tale che le operazioni

$$\begin{aligned} G \times G \to G, &\quad (a,b) \mapsto ab \\ G \to G, &\quad a \mapsto a^{-1} \end{aligned}$$

di moltiplicazione e inversione sono lisce.

Esempio 2.1
I gruppi di Lie che ci interesseranno maggiormente sono:

- il gruppo delle matrici ortogonali $\mathrm{O}(n)$;
- il gruppo delle matrici unitarie $\mathrm{U}(n)$;
- il gruppo $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ delle isometrie di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.2
Sia G un gruppo. Presi due elementi $g, h \in G$ definiamo il **commutatore**

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1} \ .$$

Osservazione 2.2
Il commutatore $[g,h]$ è banale se e solo se i due elementi commutano.

Dato un gruppo G e due sottogruppi $H, K < G$, definiamo $[H, K]$ come il sottogruppo di G generato da tutti i commutatori $[h, k]$ al variare di $h \in H$ e $k \in K$. Posto $G_0 = G$, possiamo definire iterativamente $G_k = [G_{k-1}, G]$. Osserviamo che G è **abeliano** se e solo se $G_1 = e$; inoltre diciamo che G è **nilpotente** se $G_k = e$ per un certo k.
Per definizione, se G è nilpotente esiste un k per cui tutti gli elementi del tipo $[g_1, [..., [g_k, g_{k+1}]]...]$ sono banali; la prossima proposizione mostra che vale anche il viceversa, addirittura con ipotesi più deboli.

> **Proposizione 2.3**
> *Sia G un gruppo generato da un insieme $S \subset G$, e sia $k \in \mathbb{N}$. Se gli elementi*
> $$[g_1, [..., [g_k, g_{k+1}]]...]$$
> *sono banali per ogni $g_1, ...g_{k+1} \in S$, allora $G_k = e$ e quindi G è nilpotente.*

Dimostrazione. Osserviamo che

$$[a, bc] = [a, b] \cdot [b, [a, c]] \cdot [a, c]$$

per ogni $a, b, c \in G$, dunque ragionando ricorsivamente si ha che G_k è generato da elementi della forma

$$[g_1, [..., [g_m, g_{m+1}]]...]$$

con $m \geq k$ e $g_1, ..., g_{m+1} \in S$. La tesi segue immediatamente. $\square$

2.1.1 Forma volume e misura di Haar

Studiamo ora la struttura di varietà di un gruppo di Lie G di dimensione n. Definiamo una forma volume su G. Il modo migliore per definire volumi in una n-varietà G è quello di costruire una n-forma appropriata. Una n-forma differenziale ω è il dato in ogni spazio tangente T_pG di una forma multilineare alternante

$$\omega_p : \underbrace{T_pG \times ... \times T_pG}_{n} \to \mathbb{R}.$$

L'aggettivo alternante indica che se vengono scambiati due vettori nel dominio il risultato cambia di segno. A meno di riscalamento esiste un solo ω_p che soddisfa questo criterio (identificando T_pG con $\mathbb{R}^n$ questo non è altro che il determinante). La forma ω_p deve cambiare in modo liscio con p. Le n-forme sono utili perché possono essere integrate: il altre parole ha senso la scrittura

$$\int_D \omega$$

su un qualsiasi aperto D. Una **forma volume** in una varietà piatta e orientata G è una n-forma ω tale che $\omega(v_1, ..., v_n) > 0$ per ogni base positiva, cioè che rispetta l'orientazione, $v_1, ..., v_n$ di T_pG e per ogni $p \in G$.
Se $\{U_i, \varphi_i\}$ è l'atlante che definisce la $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n))$-struttura di G, allora per ogni U_i definiamo localmente la forma volume come il pullback della misura volume di $\mathbb{R}^n$, cioè della misura di Lebesgue. Poiché i cambiamenti di carte sono isometrie e il modulo del determinante dello Jacobiano di un'isometria è 1, allora per il Teorema di Cambio di Variabile la forma volume è ben definita anche globalmente. Con questa definizione, per ogni aperto $D \subset G$ è ben definito il volume:

$$\mathrm{Vol}(D) = \int_D \omega$$

che è un numero positivo o infinito. Se D ha chiusura compatta, il volume è necessariamente finito.

Definizione 2.4
Sia G un gruppo di Lie. Una **misura di Haar** invariante a sinistra su G è una misura boreliana μ su G tale che:

- $\mu(A) = \mu(gA)$ per ogni boreliano $A \subset G$ e per ogni $g \in G$;
- $\mu(A) > 0$ per ogni aperto A non vuoto;
- $\mu(A) < +\infty$ per ogni compatto A.

Teorema 2.5
Un gruppo di Lie G ha una misura di Haar invariante a sinistra e questa è unica a meno di riscalamento.

Dato che la moltiplicazione a sinistra $L_g : G \to G$ per un elemento $g \in G$ è liscia, deduciamo che l'omomorfismo

$$d(L_g)_e : T_eG \to T_gG$$

è un isomorfismo, con inversa $d(L_{g^{-1}})_g$. Dunque, dare una n-forma invariante a sinistra (cioè L_g-invariante) su G equivale a dare una n-forma sullo spazio vettoriale T_eG. In particolare, l'unica n-forma (a meno di riscalamento) positiva su T_eG dà una n-forma di volume su G ed è proprio la misura di Haar.

2.2 Il Lemma di Margulis

Sia G un gruppo di Lie. il teorema principale di questa sezione è il Lemma di Margulis, che spiega la struttura di gruppo di "sufficientemente piccoli" sottogruppi discreti di G.

Teorema 2.6 - Lemma di Margulis
Dato G un gruppo di Lie, esiste un intorno U di $e \in G$ tale che ogni sottogruppo discreto $\Gamma < G$ generato da elementi in U è nilpotente.

Dimostrazione. Consideriamo la mappa

$$[\cdot,\cdot] : G \times G \to G.$$

Dato che è composizione di mappe lisce, è anch'essa liscia; inoltre manda i sottogruppi $G \times \{e\}$ e $\{e\} \times G$ nell'identità e. A meno di scegliere una carta intorno ad e, possiamo considerare la restrizione di

$$[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

che manda a 0 i sottogruppi $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ e $\{0\} \times \mathbb{R}^n$. In particolare il suo differenziale in $(0,0)$ è nullo, e quindi esiste un intorno U di 0 tale che $[\cdot,\cdot]$ è 1/2-Lipschitz in $U \times U$. Perciò, per ogni $x, y \in U$,

$$\frac{|[x,y]-[x,0]|}{|(0,y)|}<\frac{1}{2} \implies |[x,y]|<|[x,0]|+\frac{1}{2}|(0,y)|=\frac{1}{2}|y|$$

e analogamente per x, da cui

$$|[x,y]|<\frac{1}{2}\min\{|x|,|y|\}.$$

Di conseguenza, per ogni intorno $V \subset U$ di 0 esiste un k tale che

$$\underbrace{[U,[U,...[U,U]]...]}_{k} \subset V.$$

Sia adesso Γ discreto e generato da elementi in U. Esiste un intorno $V \subset U$ tale che $V \cap \Gamma = \{e\}$, dunque gli elementi del tipo

$$[g_1,[...[g_k,g_{k+1}]]...]$$

per $g_1,...g_{k+1} \in U$ sono banali, e la Proposizione 2.3 ci permette di concludere. □

Nel caso in cui $G = \mathrm{O}(n)$ è il gruppo di Lie delle matrici ortogonali, il Lemma di Margulis può essere migliorato notevolmente; prima però abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 2.7
Sia $G = \mathrm{O}(n)$ il gruppo delle matrici ortogonali, allora esiste un intorno U di $I \in \mathrm{O}(n)$ tale che per ogni $A \in \mathrm{O}(n)$ e ogni $B \in U$ si abbia l'implicazione

$$[A,[A,B]] = I \implies [A,B] = I.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il lemma per il gruppo di Lie delle matrici unitarie $\mathrm{U}(n) \supset \mathrm{O}(n)$. Un semplice calcolo mostra che

$$[A,[A,B]] = A[A,BAB^{-1}]A^{-1}.$$

Dunque i coniugati A e BAB^{-1} commutano. Sia $\mathbb{C}^n = \bigoplus V_i$ la decomposizione in autospazi ortogonali per A e A^{-1} (rispetto al prodotto hermitiano standard di $\mathbb{C}^n$). La decomposizione per BAB^{-1} è $\mathbb{C}^n = \bigoplus B(V_i)$.
Sia U l'intorno di I delle matrici che spostano ogni vettore di un angolo $< \pi/2$. Fissiamo $B \in U$. Dal momento che i V_i sono ortogonali, si ha che $B(V_i) \cap V_j = \{0\}$ per ogni $i \neq j$. D'altra parte, gli endomorfismi A e BAB^{-1} commutano e quindi hanno una base comune di autovettori; l'unica possibilità è perciò che $B(V_i) = V_i$ per ogni i. La restrizione $A|_{V_i}$ coincide con $\lambda_j I$ per un certo $\lambda_j \in \mathbb{C}$, e perciò commuta con $B|_{V_i}$; dunque A e B commutano ovunque. □

Corollario 2.8
Sia $G = \mathrm{O}(n)$ il gruppo delle matrici ortogonali, allora esiste un intorno U di $I \in \mathrm{O}(n)$ tale che ogni sottogruppo finito $\Gamma < \mathrm{O}(n)$ generato da elementi in U è abeliano.

Dimostrazione. Dal Teorema 2.6 sappiamo che esiste un intorno U per cui ogni tale Γ è nilpotente. D'altra parte, per il Lemma 2.7, Γ è abeliano in quanto $[A,[A,...[A,B]...]] = I$ implica in un numero finito di passaggi che $[A,B] = I$ per ogni generatore $A, B \in \Gamma \cap U$. □

Proposizione 2.9
Sia G un gruppo di Lie compatto e U un intorno di $e \in G$. Esiste un $N > 0$ tale che, per ogni sottogruppo $\Gamma < G$, il sottogruppo $\Gamma_U < \Gamma$ generato da $\Gamma \cap U$ ha indice al massimo N in Γ.

Dimostrazione. Sia $W \subset U$ un intorno di e tale che $W^{-1} = W$ e $W^2 \subset U$, e poniamo $N = \dfrac{\mathrm{Vol}(G)}{\mathrm{Vol}(W)}$. Dato che $W \cap \Gamma \subset \Gamma_U$, per ogni $g, g' \in \Gamma$ si ha

$$g\Gamma_U \cap g'W \subset g\Gamma_U \cap g'\Gamma_U.$$

Dunque ogni traslato gW interseca la classe laterale $g\Gamma_U$ e nessun altra. D'altra parte i traslati gW (al variare di $g \in \Gamma/\Gamma_U$) sono disgiunti: se $gW \cap g'W \neq \emptyset$, esistono $w, w' \in W$ tali che $gw = g'w'$, da cui $g^{-1}g' = w(w')^{-1} \in U$, e cioè $g\Gamma_U = g'\Gamma_U$. Di conseguenza, Γ_U ha indice al massimo N in Γ. □

Dai precedenti due risultati otteniamo il seguente corollario:

Corollario 2.10
Esiste un $N > 0$ (dipendente solo da n) tale che ogni sottogruppo finito di $\mathrm{O}(n)$ contiene un sottogruppo abeliano di indice al massimo N.

2.3 Ancora isometrie di $\mathbb{R}^n$

Nel primo capitolo dell'elaborato abbiamo caratterizzato le isometrie di $\mathbb{R}^n$ e ne abbiamo richiamato alcune proprietà. Vediamone altre:

Lemma 2.11
Siano $f(x) = Ax + b$, $g(x) = Cx + d$ isometrie di $\mathbb{R}^n$.

1. *L'inversa di f è $f^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$;*
2. *Se f agisce liberamente, cioè $\mathrm{Fix}(f) = \emptyset$, allora $\mathrm{Fix}(A) \neq \{0\}$;*
3. *Esiste una traslazione di $\mathbb{R}^n$ che coniuga f ad $Ax + b'$, con $b' \in \mathrm{Fix}(A)$;*
4. *Il commutatore di f e g è*

$$[f, g] = [A, C]x + A(I - C)A^{-1}b + AC(I - A^{-1})C^{-1}d.$$

Dimostrazione. 1. Facile calcolo.
2. Se l'equazione $Ax + b = x$ non ammette soluzione, cioè $(A - I)x = -b$ non ammette soluzione, necessariamente la matrice $(A - I)$ non è surgettiva, e quindi non è iniettiva. Concludiamo osservando che $\mathrm{Fix}(A) = \ker(A - I)$.
3. La traslazione $x \mapsto x + d$ coniuga f a

$$(A(x + d) + b) - d = Ax + (A - I)d + b.$$

Dato che A è ortogonale, si ha che $\mathrm{Im}(A - I) = \ker(A - I)^\perp = \mathrm{Fix}(A)^\perp$, dunque decomponendo $\mathbb{R}^n = \mathrm{Fix}(A) \oplus^\perp \mathrm{Fix}(A)^\perp$ e scrivendo $b = b' - b''$, con $b' \in \mathrm{Fix}(A)$ e $b'' \in \mathrm{Fix}(A)^\perp$, esiste $d \in \mathbb{R}^n$ tale che $(A - I)d = b''$, cioè $b' = (A - I)d + b \in \mathrm{Fix}(A)$.
4. Segue dal punto 1. infatti:

$$[f,g] = fgf^{-1}g^{-1} = (Ax+b)(Cx+d)(A^{-1}x - A^{-1}b)(C^{-1}x - C^{-1}d) =$$
$$[A,C]x + A(I-C)A^{-1}b + AC(I-A^{-1})C^{-1}d.$$

□

L'omomorfismo $r : \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{O}(n)$, che manda ogni isometria nella sua parte rotazionale, induce una successione esatta

$$1 \to \mathbb{R}^n \to \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{r} \mathrm{O}(n) \to 1$$

dove indichiamo con $\mathbb{R}^n$ il gruppo delle traslazioni di $\mathbb{R}^n$.
Sia adesso $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ un sottogruppo discreto. Otteniamo la seguente successione esatta

$$1 \to T \to \Gamma \to r(\Gamma) \to 1,$$

dove $T \triangleleft \Gamma$ è detto **sottogruppo delle traslazioni** di Γ. Osserviamo che T è abeliano. D'ora in poi, quando incontriamo la mappa r intendiamo sempre questa mappa.
Osserviamo che il sottogruppo $r(\Gamma) < \mathrm{O}(n)$ non è necessariamente discreto. Una rototraslazione in $\mathbb{R}^3$ è la composizione di una rotazione di angolo θ intorno ad un asse di rotazione l e di una traslazione di lunghezza $t > 0$. Una rototraslazione genera un sottogruppo discreto $\Gamma = \mathbb{Z}$ che agisce liberamente su $\mathbb{R}^3$, il cui quoziente è $\mathbb{R}^3/\Gamma$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Se $\theta/\pi \notin \mathbb{Q}$, allora $r(\Gamma)$ non è discreto e forma un sottogruppo denso di $\mathrm{O}(3)$ formato da rotazioni attorno a l.
Nel caso dello spazio Euclideo, siamo in grado di migliorare il risultato ottenuto nel Corollario 2.10.

Teorema 2.12
Esiste un $N > 0$ (dipendente solo da n) tale che ogni sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *contiene un sottogruppo abeliano di indice al massimo N.*

Dimostrazione. Sia $U \subset \mathrm{O}(n)$ un intorno di I tale che:

- il suo commutatore sia contratto in U, cioè $[U,U] \subset \frac{1}{2}U$ (si guardi la dimostrazione del Lemma di Margulis 2.6);
- l'intorno U è simmetrico, cioè $U = U^{-1}$;
- per ogni $A \in U$ la matrice $A - I$ contrae vettori uniformemente cioè $||(A-I)v|| < \frac{1}{4}||v||$ per ogni $v \neq 0$.

Sia $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ un sottogruppo discreto e sia $r(\Gamma)_U$ il gruppo generato da $r(\Gamma) \cap U$. Dalla Proposizione 2.9 l'indice di $r(\Gamma)_U$ in $r(\Gamma)$ è limitato da un qualche N che dipende solo da U. Quindi la sua controimmagine

$$\Gamma^* = r^{-1}(r(\Gamma)_U) \cap \Gamma$$

ha indice in Γ limitato da N. Il gruppo Γ^* è un sottogruppo di Γ che consiste di tutte le isometrie del tipo $Ax + b$ tali che $A \in r(\Gamma)_U$. Rimane da dimostrare che Γ^* è abeliano.
Siano $A_1x + b_1$ e $A_2x + b_2$ due elementi di Γ^*. Definiamo

$$A_{i+1}x + b_{i+1} = [A_1x + b_1, A_ix + b_i]$$

per ogni $i \geq 2$. Per il Lemma 2.11 si ha che

$$A_{i+1}x + b_{i+1} = [A_1, A_i]x + A_1(I - A_i)A_1^{-1}b_1 + A_1A_i(I - A_1^{-1})A_i^{-1}b_i$$

e quindi

$$A_{i+1} = [A_1, A_i], \qquad b_{i+1} = A_1(I - A_i)A_1^{-1}b_1 + A_1A_i(I - A_1^{-1})A_i^{-1}b_i.$$

Supponiamo innanzitutto che $A_1, A_2 \in U$. Dato che la mappa $[\cdot, \cdot]$ contrae i vettori di U e $A_i - I$ contrae i vettori uniformemente, otteniamo che $A_i \to I$ e $b_i \to 0$ quando $i \to \infty$. Ma allora A_ix+b_i tende all'identità, e dato che Γ^* è discreto, la successione si deve stabilizzare, cioè esiste un i_0 tale che $A_{i_0} = I$; perciò usando ricorsivamente il Lemma 2.7 si ottiene che $A_3 = [A_1, A_2] = I$ cioè A_1, A_2 commutano. Dato che $r(\Gamma^*)$ è generato da $r(\Gamma^*) \cap U$, ne deduciamo che $r(\Gamma^*)$ è abeliano. Di conseguenza

$$A_{i+1}x + b_{i+1} = x + (I - A_i)b_1 + (A_1 - I)b_i. \quad (\star)$$

Consideriamo ora il caso in cui $A_1 \in U$ e $A_2 = I$. Dall'uguaglianza precedente otteniamo

$$A_{i+1}x + b_{i+1} = x + (A_1 - I)b_i = ... = x + (A_1 - I)^{i-1}b_2.$$

Dato che $A_1 \in U$, si ha che $(A_1 - I)^ib_2 \to 0$ quanto $i \to \infty$, e perciò come prima $(A_1 - I)^ib_2 = 0$ per qualche i, da cui $(A_1 - I)b_2 = 0$ in quanto A_1 è diagonalizzabile; dunque $b_2 \in \mathrm{Fix}(A_1)$. Questo argomento mostra che, se Γ^* contiene una traslazione $x + b$, allora $b \in \mathrm{Fix}(A)$ per ogni $A \in r(\Gamma^*) \cap U$. Dato che tali A generano $r(\Gamma^*)$, il vettore b appartiene a $W = \mathrm{Fix}(r(\Gamma^*))$. Siano adesso $Ax + b, Cx + d$ elementi qualsiasi di Γ^*. Dalla relazione $(\star)$ otteniamo

$$[Ax + b, Cx + d] = x + (I - C)b + (A - I)d.$$

Da quanto detto sopra, il vettore $(I-C)b+(A-I)d \in W$. D'altra parte $\mathrm{Im}(I-C) = \ker(I-C)^\perp = \mathrm{Fix}(C)^\perp \subset W^\perp$, e analogamente $\mathrm{Im}(A - I) \subset W^\perp$, da cui $(I - C)b + (A - I)d \in W \cap W^\perp = \{0\}$ e quindi le due isometrie commutano. □

2.4 Gruppi cristallografici

Definizione 2.13
Un sottogruppo discreto $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ si dice **gruppo cristallografico** se il quoziente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto.

Proposizione 2.14
L'immagine $r(\Gamma)$ di un gruppo cristallografico è finita.

Dimostrazione. Grazie al Teorema 2.12 possiamo supporre che Γ sia abeliano. Vogliamo mostrare che, nell'ipotesi in cui Γ è abeliano, l'immagine $r(\Gamma)$ è banale, cioè tutti gli elementi di Γ sono traslazioni. Supponiamo per assurdo che Γ contenga un'isometria $Ax + b$ con $A \neq I$. A meno di coniugare Γ per una traslazione, possiamo supporre $b \in \mathrm{Fix}(A)$; sia inoltre $Cx + d$ un'altra isometria di Γ. Il commutatore

$$[Ax + b, Cx + d] = x + (A - I)d - (C - I)b$$

è banale; visto che A e C commutano e $b \in \mathrm{Fix}(A)$, si ha che $(A - I)d = (C - I)b \in \mathrm{Fix}(A)$, cioè $(A - I)^2 d = 0$ in quanto $A - I$ è diagonalizzabile. Perciò abbiamo mostrato che $d \in \mathrm{Fix}(A) \subsetneq \mathbb{R}^n$ per ogni isometria $Cx + d$ in Γ. Di conseguenza, l'orbita di $0 \in \mathbb{R}^n$ tramite Γ è interamente contenuta in $\mathrm{Fix}(A)$. Ma la compattezza di $\mathbb{R}^n/\Gamma$ implica che esiste un dominio fondamentale compatto, e quindi un $R > 0$ tale che ogni punto di $\mathbb{R}^n$ dista al massimo R da ogni orbita; questa è una contraddizione in quanto $\mathrm{Fix}(A)$ è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^n$. □

Definizione 2.15
Il rango di un gruppo abeliano è il massimo numero di elementi linearmente indipendenti.

Corollario 2.16
Ogni gruppo cristallografico ammette un sottogruppo delle traslazioni T di indice finito e isomorfo a $\mathbb{Z}^n$.

Dimostrazione. Come nella proposizione precedente, possiamo supporre Γ abeliano per il Teorema 2.12. Ora Γ è finitamente generato poiché $\mathbb{R}^n/\Gamma$ è compatto. Il rango di un gruppo abeliano finitamente generato è definito come il rango della sua parte libera. La parte libera di Γ è proprio T in quanto T ha indice finito (per la Proposizione 2.14). Inoltre T è finitamente generato ed è libero perché non ha elementi di ordine finito. Dunque $\operatorname{rnk} T = \operatorname{rnk} \Gamma = n$. □

Siamo quindi pronti per dimostrare il Teorema di Bieberbach:

Teorema 2.17 - Teorema di Bieberbach
Se M è una varietà piatta, completa, connessa e compatta, allora è finitamente rivestita da un toro piatto.

Dimostrazione. Per il Teorema 1.18 $M = \mathbb{R}^n/\Gamma$, dove $\Gamma = \Pi_1(M)$ è un sottogruppo discreto di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$. Poiché M è compatta, Γ è un gruppo cristallografico. Il Corollario 2.16 dice che esiste un sottogruppo $T \lhd \Gamma$ isomorfo a $\mathbb{Z}^n$ e di indice finito, dunque la mappa

$$\mathbb{R}^n/T = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \underbrace{S^1 \times ... \times S^1}_{n} \longrightarrow M = \mathbb{R}^n/\Gamma$$

è un rivestimento finito, da cui la tesi. □

Capitolo 3

Superfici compatte localmente isometriche a $\mathbb{R}^2$

Per quanto visto nei capitoli precedenti, una superficie compatta localmente isometrica a $\mathbb{R}^2$ è il quoziente di $\mathbb{R}^2$ per l'azione di un sottogruppo discreto Γ di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua. Inoltre, per il Teorema di Bieberbach 2.17, si ha che Γ contiene un sottogruppo di indice finito generato da traslazioni per due vettori v_1 e v_2 linearmente indipendenti. In questo capitolo classifichiamo le superfici compatte che ammettono una metrica localmente isometrica a $\mathbb{R}^2$ e dimostriamo che tali superfici sono due: il toro e la bottiglia di Klein.

3.1 Isometrie affini di $\mathbb{R}^2$

In questa sezione studiamo la classificazione delle isometrie affini di $\mathbb{R}^2$.

Definizione 3.1
Un'isometria affine si dice **diretta** se il determinante della sua parte lineare è uguale a 1. Si dice invece **inversa** se il determinante della sua parte lineare è uguale a -1.

Sia f un'isometria affine del piano Euclideo e sia $R = \{O, e_1, e_2\}$ un sistema di coordinate ortonormali. La matrice associata a f rispetto a R è

$$M_f(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix}, \text{ con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Studiamo i punti fissi di f. L'equazione del sottospazio dei punti fissi di f è

$$(A - I)x + b = 0.$$

Dunque f ha punti fissi se questa equazione ha soluzione. In particolare:

- Se $\mathrm{rnk}(A - I) = \mathrm{rnk}(A - I|b) = 2$, allora f ha un unico punto fisso;
- Se $\mathrm{rnk}(A - I) = \mathrm{rnk}(A - I|b) = 1$, allora f ha una retta di punti fissi;
- Se $\mathrm{rnk}(A - I) = \mathrm{rnk}(A - I|b) = 0$, allora f è l'identità.

3.1.1 Isometrie dirette

Se $\det(A) = 1$, allora esiste un angolo θ tale che

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che in questo caso il polinomio caratteristico di A è:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + 1 \text{ e } tr(A) = 2\cos(\theta).$$

a. Se $\cos(\theta) = \frac{1}{2}tr(A) \neq 1$, allora $\lambda = 1$ non è un autovalore di A e quindi $\mathrm{rnk}(A - I) = 2$. Dunque f ha un unico punto fisso che chiamiamo P. In questo caso f è una **rotazione di angolo** θ **e centro** P. Nel sistema di coordinate $R' = \{P, e_1, e_2\}$ la matrice associata a f è

$$M_f(R') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

b. Se $\cos(\theta) = \frac{1}{2}tr(A) = 1$, allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora, se $\mathrm{rnk}(A - I) = \mathrm{rnk}(A - I|b) = 0$, allora f è l'**identità**. Se invece $\mathrm{rnk}(A - I) \neq \mathrm{rnk}(A - I|b)$, allora f è una **traslazione di vettore** b.

3.1.2 Isometrie inverse

Se $\det(A) = -1$, gli autovalori di A sono 1 e -1. Se prendiamo u_1 autovettore relativo a 1 e u_2 autovettore relativo a -1, si ha che nella base $B' = \{u_1, u_2\}$ la matrice associata a $\bar{f}$, che chiameremo sempre A, è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quindi che $\mathrm{rnk}(A - I) = 1$.

a. Se $\mathrm{rnk}(A - I|b) = 1$ allora esiste una retta di punti fissi di f. Sia P un punto di tale retta, nel sistema di coordinate ortonormali $R' = \{P, \frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}\}$ la matrice associata a f è

$$M_f(R') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e f è una **simmetria assiale**. La retta di punti fissi r coincide con $P + \mathrm{Span}(u_1)$ ed è chiamata asse di simmetria.

b. Se $\mathrm{rnk}(A - I|b) = 2$ allora f non ha punti fissi. Nel sistema di coordinate ortogonali $R' = \{O, \frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}\}$ la matrice associata a f è:

$$M_f(R') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ c_2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Studiamo se in questo caso esiste o no una retta invariante. Sappiamo che $V_1 = \text{Span}(u_1)$ e $V_2 = \text{Span}(u_2)$. Calcoliamo il vettore $\overline{xf(x)}$, che parte da x e punta in $f(x)$. Siano (x_1, x_2) le coordinate del punto x in R', abbiamo:

$$\overline{xf(x)} = f(x) - x = (x_1 + c_1, -x_2 + c_2) - (x_1, x_2) = (c_1, -2x_2 + c_2).$$

Se $-2x_2 + c_2 = 0$, allora $\overline{xf(x)} \in \text{Span}(u_1)$. Quindi, la retta di equazione $r : -2x_2 + c_2 = 0$ è invariante per f. Se prendiamo un punto $P \in r$ come origine del sistema di coordinate (dunque le coordinate di p sono della forma $(p, \frac{c_2}{2})$), abbiamo che in $R'' = \{P, \frac{u_1}{||u_1||}, \frac{u_2}{||u_2||}\}$ la matrice di f è:

$$M_f(R'') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questa è la **composizione di una simmetria assiale di asse** $P + \text{Span}(u_1)$ **e una traslazione parallela all'asse di vettore** $(p, 0)$.

Riassumendo:

$\text{rnk}(A - I)$	$\text{rnk}(A - I\|b)$	**Punti fissi**	**Classificazione**
0	0	tutti	Identità
0	1	nessuno	Traslazione
2	2	1	Rotazione

Tabella 3.1: $\det(A) = 1$

$\text{rnk}(A - I)$	$\text{rnk}(A - I\|b)$	**Punti fissi**	**Classificazione**
1	1	asse	Simmetria assiale
1	2	nessuno	Riflessione traslatoria

Tabella 3.2: $\det(A) = -1$

3.2 Il toro

Il toro è una superficie che si può ottenere quozientando $\mathbb{R}^2$ per l'azione di $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, sottogruppo generato da due traslazioni per vettori linearmente indipendenti. Ad esempio:

$$f(x) = x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g(x) = x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}^2$.

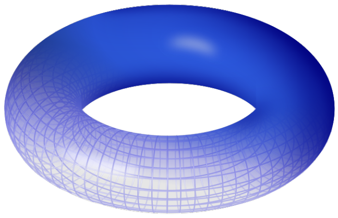

Fig 3.1: Immersione del toro in $\mathbb{R}^3$

Inoltre, possiamo notare che un dominio fondamentale di questa azione è dato dal quadrato $[0,1]^2$, che quozientiamo come in Figura 3.2, identificando cioè i bordi tramite le seguenti relazioni:

- $(x,0) \sim (x,1)$ per ogni $x \in [0,1]$;
- $(0,y) \sim (1,y)$ per ogni $y \in [0,1]$.

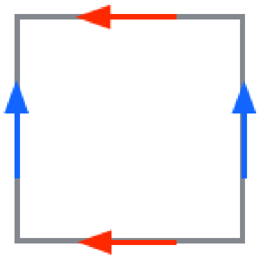

Fig 3.2: Dominio fondamentale in $\mathbb{R}^2$ per il toro

3.3 La bottiglia di Klein

La bottiglia di Klein è una superficie che si può ottenere quozientando $\mathbb{R}^2$ per l'azione di $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$, sottogruppo generato da una riflessione traslatoria e da una traslazione perpendicolare all'asse di riflessione. Ad esempio:

$$f(x) = x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}^2$.

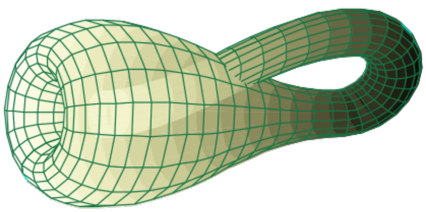

Fig 3.3: Immersione della bottiglia di Klein in $\mathbb{R}^3$

Inoltre, possiamo notare che un dominio fondamentale di questa azione è dato dal quadrato $[0,1]^2$, che quozientiamo come indicato in Figura 3.4, cioè identificando i bordi tramite le seguenti relazioni:

- $(x,0) \sim (1-x,1)$ per ogni $x \in [0,1]$;
- $(0,y) \sim (1,y)$ per ogni $y \in [0,1]$.

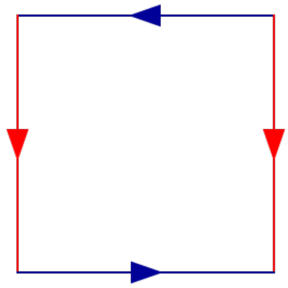

Fig 3.4: Dominio fondamentale in $\mathbb{R}^2$ per la bottiglia di Klein

Osserviamo che Γ è un sottogruppo di $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua e ammette dominio fondamentale compatto. Per quanto visto quindi la bottiglia di Klein è una varietà compatta piatta di dimensione 2. Dunque per il Teorema di Bieberbach 2.17 è rivestita dal toro, infatti possiamo ottenere un dominio fondamentale del toro incollando due domini per la bottiglia di Klein. Si può osservare altrimenti che

$$g^2(x) = x + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e quindi $\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} < \Gamma$, cioè Γ contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ di indice 2.

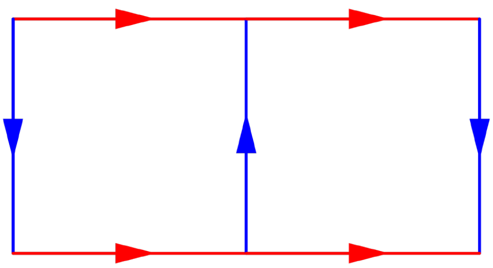

Fig 3.5: Rivestimento del toro sulla bottiglia di Klein

3.4 Classificazione

Sia $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2)$ che agisce in maniera libera e propriamente discontinua su $\mathbb{R}^2$. Come abbiamo visto, ogni elemento di Γ è della forma $f(x) = Ax + b$ dove $A \in \mathrm{O}(2)$ e $b \in \mathbb{R}^2$. Consideriamo $s : \Gamma \to \{\pm 1\}$ tale che $s(f) = \det(A)$. Si hanno due possibilità:

a. s è banale;

b. s è surgettivo.

Caso a

Se l'omomorfismo s è banale, allora tutte le parti lineari di elementi di Γ hanno determinante uguale a 1. Per quanto appena visto, poiché Γ agisce in maniera libera su $\mathbb{R}^2$, allora gli elementi di Γ non hanno punti fissi, cioè Γ è costituito solo di traslazioni. Quindi Γ è il gruppo delle traslazioni di vettori v_1 e v_2 linearmente indipendenti isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ e $\mathbb{R}^2/\Gamma = S^1 \times S^1$ è il **toro**.

Caso b

Se l'omomorfismo s è surgettivo allora, per quanto visto, $\ker(s) = T$ è un gruppo di traslazioni di indice 2 e esiste una riflessione traslatoria $\beta \in \Gamma$ tale che $\beta(x) = Bx + b$ e $\det(B) = -1$. Quindi $\Gamma = T \cup \beta(T)$. Scegliamo β tale che $|b|$ sia minimo. Esiste perché $\beta^2 = 2b : x \mapsto x + 2b \in T$, che è discreto dunque i possibili b appartengono ad un sottoinsieme discreto di $\mathbb{R}^2$. Osserviamo che $2b$ è un elemento indivisibile in T. Supponiamo per assurdo $2b = nv$ con $n \geq 2,\ v \in T$, allora

$$x \mapsto Bx + b - v$$

sarebbe una riflessione traslatoria tale che $||b - v|| < ||b||$, il che è assurdo.
L'obiettivo adesso è dimostrare che $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, w)$, dove w è un vettore ortogonale a b. Da questo infatti segue che Γ è un sottogruppo generato dalla riflessione traslatoria β e dalla traslazione perpendicolare all'asse della riflessione w.

Lemma 3.2
Sia T un reticolo di traslazioni, cioè $T \cong \mathbb{Z}^2$ generato da due vettori linearmente indipendenti. Se $v \in T$ è indivisibile, allora $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(v, c)$.

Dimostrazione. Siano v_1, v_2 due generatori di T linearmente indipendenti. Allora $v = n_1v_1 + n_2v_2$ con $(n_1, n_2) = 1$ (altrimenti v sarebbe divisibile). Allora esistono $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $n_1m_1 - n_2m_2 = 1$. Dunque

$$v = n_1v_1 + n_2v_2 \ \text{ e } \ c = m_2v_1 + m_1v_2$$

generano T (infatti $v_1 = m_1v - n_2c$ e $v_2 = n_1c - m_2v$). $\square$

Per quanto visto, abbiamo che $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, w)$ con w linearmente indipendente da b. A meno di cambio di base, possiamo metterci nel caso in cui

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix} \text{ e } w = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \text{ con } d \neq 0.$$

Sia adesso

$$c = w - B(w) = \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Anche $c \in T$, in quando $w \in T$ e $B(w) \in T$ perché la traslazione $B(w)$ si ottiene coniugando la traslazione w con l'elemento $\beta(x) = Bx + b$.
Inoltre, l'area del rettangolo con lati $2b$ e c ($A_r = 4kd$) è doppia rispetto a quella del parallelogramma con lati $2b$ e w ($A_p = 2kd$), per cui si ha che $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, c)$ ha indice 2 in $T = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, w)$.
Distinguiamo ora due casi:

1. $\dfrac{c}{2} \notin T$;
2. $\dfrac{c}{2} \in T$.

Caso 1

Supponiamo per assurdo $\dfrac{c}{2} \notin T$. Poiché $2b$ e w generano T e $c \in T$, allora esistono $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tali che

$$c = n_1 2b + n_2 v, \text{ cioè } \begin{pmatrix} 2d \\ 0 \end{pmatrix} = n_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

da cui segue $n_2 = 2$ e $e = -n_1 k$.
Inoltre, n_1 deve essere dispari, altrimenti

$$\frac{c}{2} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{n_1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \in T,$$

ma stiamo supponendo $\frac{c}{2} \notin T$. Allora

$$\frac{c}{2} + b = \begin{pmatrix} d \\ k \end{pmatrix} = \frac{1+n_1}{2} 2b + w \in T.$$

Ora, componendo β con la traslazione $-(\frac{c}{2} + b)$ otteniamo

$$\beta(x - \frac{c}{2} - b) = B(x - \frac{c}{2} - b) + b = Bx + \frac{c}{2} - b + b = Bx + \frac{c}{2},$$

che ha come punto fisso $x = \frac{c}{4}$, contro il fatto che agisca liberamente.
Caso 2
Se $\frac{c}{2} \in T$, allora $\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}(2b, \frac{c}{2}) = T$, per cui potevamo porre $w = \frac{c}{2}$, e ci siamo ricondotti al caso della **bottiglia di Klein**: infatti Γ è generato da una riflessione traslatoria e da una traslazione perpendicolare all'asse della riflessione (notiamo infatti che b e c sono perpendicolari).
Abbiamo così dimostrato il seguente teorema:

Teorema 3.3
Sia Σ una superficie compatta localmente isometrica a $\mathbb{R}^2$. Allora Σ è diffeomorfa al toro o alla bottiglia di Klein.

Bibliografia

[1] R. Benedetti and C. Petronio. Lectures on hyperbolic geometry. *Universitext*, 1(ISBN 978-3-540-55534-6):342, 1992.

[2] B. Martelli. Lezioni di geometria iperbolica. 2012.

[3] B. Martelli. An introduction to geometric topology. 2023.

[4] G. Mezzedimi. Il teorema di bieberbach. 2018.

[5] D. Perrone. Un'introduzione alla geometria riemanniana (seconda edizione). *ESE Salento University Publishing*, Quaderni di Matematica(ISBN 978-88-8305-195-1):500, 2023.

[6] W. P. Thurston. Three-dimensional geometry and topology (volume 1). *PRINCETON UNIVERSITY PRESS*, 1(ISBN 0-691-08304-5):322, 1997.

Ringraziamenti

Al Professor Roberto Frigerio, per l'aiuto e i consigli preziosi che mi ha dato in questi mesi per la realizzazione della tesi. La ringrazio per avermi fatto scoprire il magnifico mondo della geometria e avermene fatto innamorare.

Ai miei genitori, a cui devo tutto. Grazie per avermi dato la possibilità di studiare qui, per credere sempre in me e per esserci sempre. Grazie mamma, per la testardaggine; grazie papà, per le battute che non fanno ridere. Siete i miei fari. A mio fratello Michele, a cui la matematica non piace per nulla. Spero di farti cambiare idea un giorno. Auguro a te, Francesca, Micaela e Giuseppe che possiate raggiungere tutti i vostri obiettivi. Ai miei nonni, ai miei zii e a Isa, sapete quanto io sia legata a voi e il bene che vi voglio. Vi ringrazio semplicemente per essere così come siete e per tutto quello che fate per la nostra famiglia. Sono molto orgogliosa di farne parte.

Ad Antonella, Graziana, Giuseppe, Giuseppe, Andrea e Ilaria, per la nostra amicizia che oramai dura da quasi un decennio e per le nostre lunghissime chiacchierate raccontandoci cosa c'è di nuovo nelle nostre vite. Ad Alessia e Chiara, per le nostre serate in pigiama. Se ripenso a come ci siamo conosciute mi vengono i brividi e ringrazio sempre il destino per averci fatto incontrare su quell'aereo per Edimburgo nell'estate del 2018. Alle mie coinquiline: Lara, per essere la mia Dancing Queen preferita e una compagna di viaggio eccezionale; Vera, per le croste della pizza e per essere un grande esempio da seguire; Francesca, per la sua dolcezza e per le imitazioni dei doppiatori di MTV; Matilde, coinquilina acquisita molto carina e coccolosa; Elisa, Giulia e Giorgia Mangione. Mi avete fatto sentire a casa anche a 800 km da Polignano.

Al dipartimento, per avermi accolta e per avermi fatto conoscere gente meravigliosa.

Ad Eva, per non essere scappata via durante la nostra prima colazione insieme, per tutte le lezioni sedute l'una accanto all'altra cercando di interpretare ciò che c'era scritto alla lavagna e per tutti i disegnini fatti quando la lezione diventava incomprensibile da seguire. Grazie per le poche notti passate a studiare e per le tante notti passate a chiacchierare o a guardare film di Barbie. Grazie per essere la mia Marina. A Carlo, per essersi arreso ai miei lunghissimi discorsi senza un filo logico in qualsiasi momento della giornata e per essere la vittima perfetta quando si gioca a Panda gialla, cioè sempre. Grazie perché so che su di te posso sempre contare e perché mi lasci vincere a

pollicione nonostante non sappia giocare. A Gianni e Antonio, per rallegrare le mie giornate con il loro buonumore e per sopportare le mie tante lamentele. A Marta, il mio tigrotto riccio preferito. A Giorgia, per tutte le pallonate a pallavolo. A Lisa, per la sua meravigliosa risata. Ad Eleonora, la bimba delle uscite di domenica. A Valentina, per essere un'organizzatrice perfetta di feste e regali. Ad Andrea, Pietro e Federico, per i loro abbracci. A Gabriel, Cesare, Chiara e Giovanni per le risate e gli scleri tra un codice e un altro. A Camilla, Daniele, Mattia, Niccolò e Giuliano per le nostre serate in dip e non solo e per riaccompagnarmi sempre a casa. Ad Irma, Vittorio, Tommaso, Diego, Luca, Giovanni, Leonardo, Leonardo, Filippo, Lorenzo e Andrea per tutti i bei momenti vissuti insieme. Ai bimbi del secondo anno, per la stupenda allegria che avete portato in Aula 2. Ai bimbi più grandi, per tutti i consigli che mi avete dato. In particolare ringrazio Chiara, Alessio, Arianna e Luca.

Alla Conad, per la cioccolata che ha fatto in modo che capissi quell'esercizio di Aritmetica il primo anno. Da qual momento è d'obbligo mangiarne un pezzettino prima di ogni esame.

A tutte le persone che mi hanno aiutato (e sopportato) in questi anni, sia con la matematica che con tutto il resto.

A tutti coloro con cui sto vivendo gli anni più intensi della mia vita.