

Varietà di Stein Esotiche Piccole

Valeria Tateo

Luglio 2026

1 Introduzione

Queste pagine sono gli appunti che ho utilizzato per la preparazione di un seminario per l'esame del corso di Topologia e Geometria in Bassa Dimensione, tenuto dal prof. Paolo Lisca nell'anno accademico 2025/2026. Il paper di riferimento che ho utilizzato è [1]. L'obiettivo del seminario è costruire coppie di 4-varietà di Stein semplicemente connesse e compatte con $b_2 \geq 1$ e che siano omeomorfe, ma non diffeomorfe.

Definizione 1

Una varietà complessa (X, J) , dove $J : TX \rightarrow TX$ è una struttura quasi complessa integrabile tale che $J^2 = -id$, si dice di Stein se ammette un embedding olomorfo proprio $X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$.

Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è J -convessa se la 2-forma $\omega := -d(J^*df)$ è non degenera (quindi simplettica) e $g_J(u, v) := \omega(u, Jv)$ è una metrica. Ogni varietà di Stein ammette una funzione J -convessa: la restrizione di $f(z_1, \dots, z_N) = \sum_i |z_i|^2$.

Definizione 2

Se $M \subseteq X$ è una sottovarietà liscia, allora M è una varietà di Stein compatta se è ottenuta imponendo la condizione $f \leq c$, con $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ funzione di Morse J -convessa e c valore regolare.

In particolare, M è una varietà simplettica con bordo dotata della forma simplettica ω . Avendo ω primitiva $\alpha := -J^*df$, la restrizione della 1-forma α al bordo ∂M definisce su di esso una forma di contatto. La struttura di contatto associata $\xi = \ker(\alpha|_{\partial M})$ coincide geometricamente con $\xi = T(\partial M) \cap J(T(\partial M))$.

Definizione 3

La coppia (M, ω) è uno Stein filling di $(\partial M, \xi)$.

Le varietà di Stein sono uno strumento molto importante quando si studiano le strutture esotiche su 4-varietà lisce. Infatti ogni 4-varietà liscia può essere decomposta in pezzi di Stein di codimensione 0. Questi pezzi sono dunque 4-varietà di Stein con bordo. Eliashberg ha caratterizzato la topologia delle varietà di Stein e ha dimostrato che S^3 , dotata della struttura di contatto standard, possiede un unico Stein filling, ossia B^4 . Successivamente, Ozbagci-Stipsicz e Smith hanno costruito infinite famiglie di Stein filling differenti, a meno di diffeomorfismo, per alcune varietà di contatto tridimensionali. Tali riempimenti sono distinti dai loro primi gruppi di omologia e, di

conseguenza, non sono neppure omeomorfi tra loro. Risulta quindi naturale ricercare coppie di 4-varietà di Stein compatte che siano omeomorfe ma non diffeomorfe. Recentemente, partendo dalla knot surgery di Fintushel e Stern, i matematici Akhmedov, Etnyre, Mark e Smith hanno costruito infinite famiglie di varietà di Stein compatte, semplicemente connesse, mutuamente omeomorfe ma non diffeomorfe, le cui strutture di contatto indotte sui bordi risultano isomorfe.

In questo seminario vengono forniti diversi esempi di coppie di varietà di Stein compatte, semplicemente connesse, che sono omeomorfe ma non diffeomorfe, descrivendone esplicitamente le decomposizioni in manici. È interessante individuare tali coppie esotiche con il più piccolo possibile secondo numero di Betti b_2 . Gli esempi presentati realizzano il caso $b_2 = 1$. I cork costituiscono strumenti fondamentali per individuare strutture lisce esotiche su 4-varietà. Gli esempi costruiti partono proprio dai cork e permettono di dimostrare i seguenti tre teoremi.

Teorema 4

Per ogni $b_2 \geq 1$ esiste una coppia di 4-varietà di Stein semplicemente connesse e compatte che siano omeomorfe, ma non diffeomorfe.

Teorema 5

Per ogni $n \geq 0$ esiste una coppia di 4-varietà di Stein semplicemente connesse e compatte che hanno le seguenti proprietà:

- *sono omeomorfe, ma non diffeomorfe;*
- *hanno primo gruppo di omologia intera del loro bordo isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Sia X una 4-varietà liscia, semplicemente connessa, compatta e tale che $H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Definiamo il genere $G(X)$ di X come il minimo genere di una superficie la cui classe rappresenta un generatore di $H_2(X; \mathbb{Z})$.

Teorema 6

Per ogni $n \geq 0$ esiste una coppia di 4-varietà di Stein semplicemente connesse e compatte X_n e Y_n che hanno le seguenti proprietà:

- *sono omeomorfe, ma non diffeomorfe;*
- $H_2(X_n; \mathbb{Z}) \cong H_2(Y_n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z};$
- $G(X_n) - G(Y_n) \geq n.$

2 Enlarging Corks

Studiamo esempi di 4-varietà di Stein semplicemente connesse, compatte, esotiche e con $b_2 \geq 1$ partendo dai cork, di cui adesso diamo la definizione.

Definizione 7

Sia C una 4-varietà di Stein semplicemente connessa compatta con bordo e sia $\tau : \partial C \rightarrow \partial C$ un'involuzione. La coppia (C, τ) è un *cork* se τ si estende ad un omeomorfismo di C , ma non si estende ad un diffeomorfismo di C . La coppia (C, τ) è un *cork di X* , dove X è una 4-varietà liscia,

se $C \subseteq X$ e X cambia classe di diffeomorfismo rimuovendo e ricolando C tramite τ . Osserviamo che X non cambia classe di omeomorfismo con questa definizione.

Vediamo un esempio di cork.

Definizione 8

Sia W_n la seguente 4-varietà liscia e sia $f_n : \partial W_n \rightarrow \partial W_n$ l'involutione ottenuta prima facendo chirurgia tra $S^1 \times B^3$ e $S^2 \times B^2$ e poi tra l'altra $S^2 \times B^2$ embedded e $S^1 \times B^3$ nella parte interna di W_n .

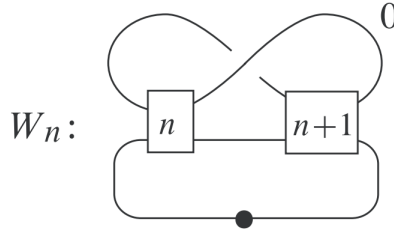


Figura 1: Cork

Osservazione 1

L'involutione f_n della definizione precedente scambia l'1-manico con il 2-manico.

Teorema 9

Per ogni $n \geq 1$, (W_n, f_n) è un cork.

Osservazione 2

La varietà W_n è contraibile.

La dimostrazione di questo teorema si trova in [2].

Definizione 10

Siano $C_1(m, n, p, q)$ e $C_2(m, n, p, q)$ le seguenti due 4-varietà semplicemente connesse e compatte:

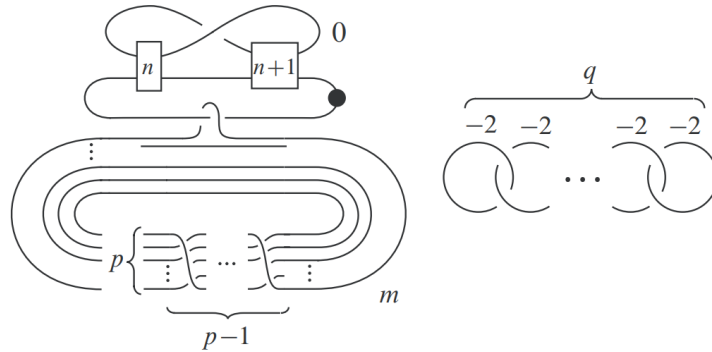


Figura 2: $C_1(m, n, p, q)$

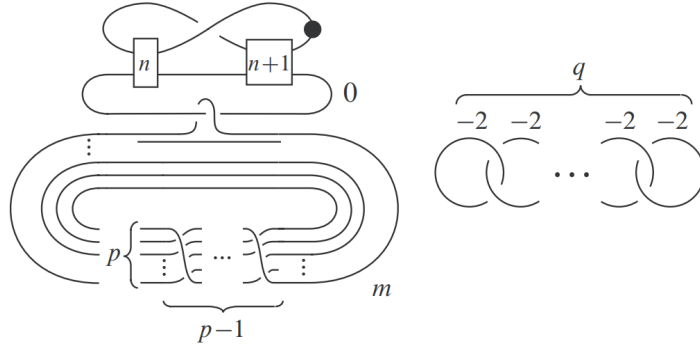


Figura 3: $C_2(m, n, p, q)$

Osservazione 3

Le varietà $C_1(m, n, p, q)$ e $C_2(m, n, p, q)$ sono semplicemente connesse perché il loro gruppo fondamentale è $\pi_1(C_i(m, n, p, q)) = \langle g \mid g = e \rangle = \{e\}$.

Lemma 11 1. Le varietà $C_1(m, n, p, q)$ e $C_2(m, n, p, q)$ sono omeomorfe.

2. Le varietà $C_1(m, n, p, q)$ e $C_2(m, n, p, q)$ sono 4-varietà di Stein compatte per $n \geq 1$, $q \geq 0$ e $m \leq p^2 - 3p$.
3. $H_1(\partial C_1(m, n, p, 0); \mathbb{Z}) \cong H_1(\partial C_2(m, n, p, 0); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.
4. $H_2(C_1(m, n, p, q); \mathbb{Z}) \cong H_2(C_2(m, n, p, q); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{q+1}$.

Dimostrazione. 1. Segue dal fatto che $C_2(m, n, p, q)$ si ottiene da $C_1(m, n, p, q)$ rimuovendo W_n contraibile e ricolloandolo tramite f_n , dunque si ha che le due 4-varietà sono omeomorfe.

2. Deformando le due 4-varietà in nodi Legendriani tramite un'isotopia, si ha la tesi per il Criterio di Eliashberg: ogni 2-manico ha framing minore del numero di Thurston Bennequin.
3. Segue dal fatto che le forme di intersezione di $C_i(m, n, p, 0)$ è rappresentata dalla matrice (m) . Osserviamo che:

- in $C_2(m, n, p, 0)$ l'1-manico e il 2-manico con framing 0 sono algebricamente cancellabili in omologia, perché hanno numero di intersezione algebrica pari a ± 1 . Dunque $H_2(C_2(m, n, p, 0); \mathbb{Z})$ è generato da un solo elemento α che è la classe di una superficie di Seifert del nodo torico di tipo $T_{p,p-1}$ (che ha framing m) chiusa con il disco che costituisce il cuore del 2-manico e con il disco che costituisce il co-cuore del 2-manico con framing 0.
- in $C_1(m, n, p, 0)$ l'1-manico viene attraversato da entrambi i due 2-manici con intersezione algebrica pari a 1. Come prima, $H_2(C_1(m, n, p, 0); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ perché anche in questo caso una coppia 1-manico/2-manico è algebricamente cancellabile, ma un generatore è la classe di una superficie chiusa che dipende sia dal 2-manico con framing m che dal 2-manico con framing 0.

In entrambi i casi $H_2(C_i(m, n, p, 0), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ e la forma di intersezione è rappresentata dalla matrice (m) . Allora dalla successione della coppia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ H_2(C_i(m, n, p, 0); \mathbb{Z}) \xrightarrow{Q} H_2(C_i(m, n, p, 0), \partial C_i(m, n, p, 0); \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\partial C_i(m, n, p, 0); \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \\ 1 \longmapsto \hspace{10em} \rightarrow m \end{array}$$

segue che

$$H_1(\partial C_i(m, n, p, 0); \mathbb{Z}) = \text{Coker } Q \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

4. Segue da come sono definite le due 4-varietà. Infatti $C_i(m, n, p, q)$ è costruita in questo modo:

- Prima si incolla un 1-manico a D^4 , ottenendo una varietà X_i che è topologicamente equivalente a $S^1 \times D^3$. Dal momento che X_i è omotopicamente equivalente a S^1 , allora $H_k(X_i; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ per ogni k .
- Successivamente a X_i si incollano $(q + 2)$ 2-manici.

Dunque, se consideriamo la successione della coppia (come CW-complexi),

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_2(C_i(m, n, p, q); \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_2(C_i(m, n, p, q), X_i; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\psi} & H_1(X_i) \longrightarrow 0 \\ & & & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ & & & & \mathbb{Z}^{q+2} & & \mathbb{Z} \end{array}$$

otteniamo che $H_2(C_i(m, n, p, q; \mathbb{Z})) = \ker \psi \cong \mathbb{Z}^{q+1}$.

□

Adesso, per poter dimostrare che le due 4-varietà di Stein semplicemente connesse e compatte $C_1(m, n, p, q)$ e $C_2(m, n, p, q)$ non sono diffeomorfe, dobbiamo introdurre cosa è una superficie ellittica. Per informazioni più precise consultare [3].

Definizione 12

Una superficie complessa S è una superficie ellittica se è dotata di un olomorfismo $\pi : S \rightarrow C$, con C curva complessa, tale che per quasi ogni $t \in C$, $\pi^{-1}(t)$ è una curva ellittica liscia, che è topologicamente un 2-toro. La mappa π si chiama fibrazione ellittica. Una mappa liscia $\pi : X \rightarrow C$, dove X è una 4-varietà chiusa orientata, è chiamata una fibrazione ellittica C^∞ se ogni fibra $\pi^{-1}(t)$ ha un intorno U e un diffeomorfismo che preserva l'orientazione $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset S$, dove S è la superficie ellittica di sopra e φ commuta con π .

Sia $E(1)$ la 4-varietà $\mathbb{CP}^2 \# 9\overline{\mathbb{CP}^2}$ dotata di una fibrazione ellittica. Usando l'operazione di somma di fibre, possono essere costruite tante superfici ellittiche partendo da $E(1)$. Siano $\pi_i : S_i \rightarrow C_i (i = 1, 2)$ fibrazioni ellittiche C^∞ . La somma di fibre $S_i \#_f S_2$ è definita nel seguente modo: siano $t_i \in C_i (i = 1, 2)$ tale che le fibre $F_i = \pi_i^{-1}(t_i)$ sono generiche e prendiamo un intorno regolare di queste fibre in S_i ; topologicamente stiamo considerando una copia di $D^2 \times T^2$ in ogni S_i . Utilizzando un diffeomorfismo φ che preserva la fibra e inverte l'orientazione tra il 3-toro di bordo delle varietà $S_i - \nu F_i$, possiamo incollare queste due varietà e costruire una nuova varietà $S_1 \#_f S_2$,

che ammette una C^∞ -fibratura ellittica $\pi : S_1 \#_f S_2 \rightarrow C_1 \# C_2$. La classe di diffeomorfismo della 4-varietà risultante potrebbe dipendere dalla scelta del diffeomorfismo φ .

Definizione 13

La superficie ellittica $E(n)$ è definita come $E(n) = \underbrace{E(1) \#_f E(1) \#_f \dots \#_f E(1)}_n$.

Teorema 14

Siano $p, q, r \geq 1$, allora la superficie ellittica $E(p + q + 2r + 1)$ ha la decomposizione in manici in Figura 4 (supponiamo $k = 3r - 2, 3r - 1$ o $3r$). Il simbolo F indica la classe di una fibra regolare di $E(p + q + 2r + 1)$ in $H_2(E(p + q + 2r + 1); \mathbb{Z})$.

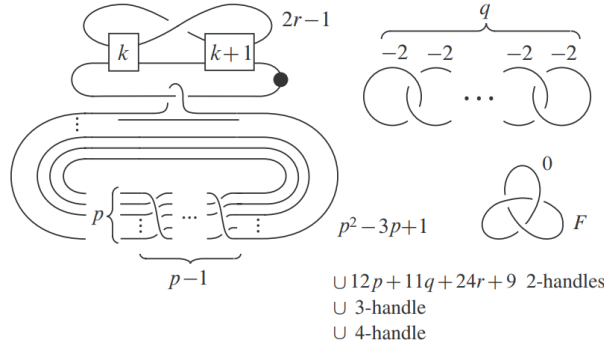


Figura 4: $E(p + q + 2r + 1)$

Corollario 15

Nelle ipotesi del teorema precedente, se $E_1, E_2, \dots, E_{2r-1}$ è la base standard di $H_2((2r - 1)\overline{\mathbb{CP}^2})$, allora la 4-varietà $E(p + q + 2r - 1) \# (2r - 1)\overline{\mathbb{CP}^2}$ ha la decomposizione in manici in Figura 5.

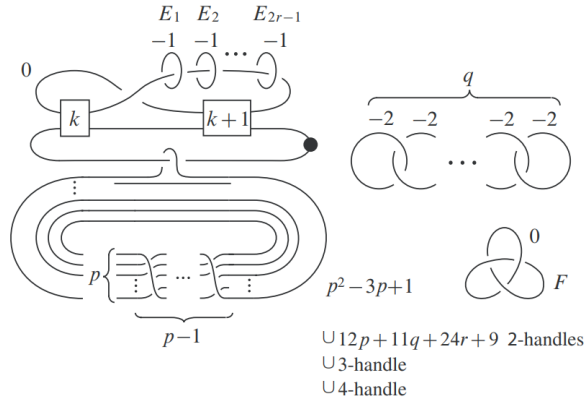


Figura 5: $E(p + q + 2r - 1) \# (2r - 1)\overline{\mathbb{CP}^2}$

Siamo quindi pronti per dimostrare il seguente teorema.

Teorema 16 1. Le due 4-varietà $C_1(m, n, p, 0)$ e $C_2(m, n, p, 0)$ sono omeomorfe ma non diffeomorfe per $n \geq 4$, $p \geq 1$ e $m \leq p^2 - 3p + 1$.

2. Le due 4-varietà $C_1(m, n, p, 0)$ e $C_2(m, n, p, 0)$ sono omeomorfe ma non diffeomorfe per $1 \leq n \leq 3$, $p \geq 3$ e $m \leq p^2 - 3p + 1$.
3. Le due 4-varietà $C_1(m, n, p, q)$ e $C_2(m, n, p, q)$ sono omeomorfe ma non diffeomorfe per $n \geq 1$, $p, q \geq 1$ e $0 \leq m \leq p^2 - 3p + 1$.

Dimostrazione. 1. Sia $\alpha \in H_2(C_1(m, n, p, 0); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ un generatore e sia $\beta \in H_2(C_2(m, n, p, 0), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ un generatore. Si verifica che β è rappresentato dalla classe di una superficie S di genere $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$. Questa superficie S si ottiene chiudendo una superficie di Seifert di genere $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ del nodo $T_{p,p-1}$ con il disco che è il cuore del 2-manico. Mostriamo che α non può essere rappresentato da una superficie di tale genere.

Caso $m = p^2 - 3p + 1$ e $n = 3r - 2$, con $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Tutti gli altri casi sono analoghi.

Fatto 17

Sia $E(n)$ la superficie ellittica definita come sopra e sia F la classe di una fibra regolare di $E(n)$ in $H_2(E(n); \mathbb{Z})$. Allora $PD((n-2)F)$ è una classe di base di Seiberg Witten di $E(n)$.

Dal Fatto 15 segue che $PD((p+2r-1)F)$ è una classe di base di Seiberg Witten di $E(p+2r+1)$. Per il Teorema di Blow Up si ha che $K := PD((p+2r-1)F + E_1 + E_2 + \dots + E_{2r-1})$ è una classe di Seiberg Witten di $X := E(p+2r+1) \# (2r-1)\overline{\mathbb{CP}^2}$. Sia $\alpha' \in H_2(X; \mathbb{Z})$ l'immagine di α tramite la mappa indotta dall'inclusione di $C_1(m, n, p, 0)$ in X e sia g il genere della superficie che rappresenta α . Allora, per la Disuguaglianza di Aggiunzione applicata a X , si ha che

$$|K(\alpha')| + \alpha' \cdot \alpha' \leq \begin{cases} 2g - 2 & g \geq 2 \\ 0 & g = 0, 1 \end{cases}.$$

Il caso $g = 0, 1$ non si verifica nelle ipotesi in cui siamo. Svolgendo i calcoli, segue che

$$g \geq \frac{1}{2}(p^2 - 3p + 2r + 2) \underset{r \geq 1}{\geq} \frac{1}{2}(p^2 - 3p + 2) = g(S).$$

Dunque $C_1(m, n, p, 0)$ e $C_2(m, n, p, 0)$ non sono diffeomorfe perché α non può essere rappresentata da una superficie di genere $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$.

2. Si fa in maniera completamente analoga al caso (1).
3. Supponiamo per assurdo che $C_1(m, n, p, q)$ e $C_2(m, n, p, q)$ sono diffeomorfe. Allora esiste una superficie di genere $\frac{1}{2}(p^2 - 3p + 2)$ con numero di autointersezione m in $C_1(m, n, p, q)$, dal momento che $C_2(m, n, p, q)$ ha una tale superficie. Sia γ un elemento di $H_2(C_1(m, n, p, q); \mathbb{Z})$ con autointersezione m e sia g il genere di una superficie che rappresenta γ .

Caso $m = p^2 - 3p + 1$ e $n = 3r - 2$, con $r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Sia $\gamma' \in H_2(X; \mathbb{Z})$ immagine di γ tramite la mappa indotta dall'inclusione di $C_1(m, n, p, q)$ in X . Poiché $\gamma' \cdot \gamma' = m \geq 0$ e per come è fatta $C_1(m, n, p, q)$, si ha che esiste un elemento $x \in H_2(X; \mathbb{Z})$ tale che $x \cdot \underbrace{((p+q+2r-1)F + E_1 + E_2 + \dots + E_{2r-1})}_{G:=} = 0$ e $\gamma' = a\alpha' + x$, con $a \geq 1$. Infatti

$H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{q+1}$ ed è generato da:

- La classe generatrice α corrispondente al 2-manico con framing m ;
- Una base $\gamma_1, \dots, \gamma_q$ corrispondente ai q 2-manici con framing -2 .

Se supponiamo esiste $\gamma \in H_2(C_1(m, n, p, q); \mathbb{Z})$ come sopra, allora

$$\gamma = a\alpha + c_1\gamma_1 + \dots + c_q\gamma_q \text{ e } \gamma' = a\alpha' + \underbrace{c_1\gamma'_1 + \dots + c_q\gamma'_q}_{x:=} \in H_2(X; \mathbb{Z}).$$

Osserviamo che

- $x \cdot G = 0$ perché i q 2-manici con framing -2 non si allacciano ai cicli che compongono la classe della fibra F e delle sfere eccezionali E_i .
- $a \neq 0$ perché la catena dei due manici con framing -2 costituisce una matrice di intersezione definita negativa, dunque $x \cdot x \leq 0$. Poiché per ipotesi $\gamma' \cdot \gamma' = m > 0$, la classe non può essere completamente contenuta nel sottospazio negativo. Quindi $a \neq 0$. Dal momento che $K := PD((p + q + 2r - 1)F + E_1 + \dots + E_{2r-1})$ è una classe di base di Seiberg Witten di X , la disuguaglianza ci dà

$$|K(\gamma')| + \gamma' \cdot \gamma' \leq \begin{cases} 2g - 2 & g \geq 2 \\ 0 & g = 0, 1 \end{cases}.$$

Come prima, si ha

$$g \geq \frac{1}{2}(p^2 - 3p + 3 + a(2r - 1)).$$

D'altra parte, γ è rappresentato da una superficie di genere $\frac{1}{2}(p^2 - 3p + 2)$, il che è assurdo! Gli altri casi sono analoghi.

□

Corollario 18

Se $r \geq 2$, $p \geq 1$ e $m \leq p^2 - 3p + 1$, allora

$$G(C_1(m, 3r - 2, p, 0)) - G(C_2(m, 3r - 2, p, 0)) \geq r.$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Selman Akbulut, Kouichi Yasui, Small exotic Stein manifolds. Comment. Math. Helv. 85 (2010), no. 3, pp. 705–721.
- [2] Selman Akbulut, Kouichi Yasui, Corks, plugs and exotic structures. J. Gokova Geom. Topol. 2 (2008), 40-82.
- [3] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus. Grad. Stud. Math. 20, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1999.