Celle di Schubert

Mirko Torresani

13 luglio 2021

Sommario

In queste pagine si analizzano gli insiemi quozienti delle S- e D-equivalenze, sfruttando le cosiddette celle di Schubert per descriverli.

Consideriamo l'insieme $M(m, n, \mathbb{K})$ delle matrici $m \times n$ dei coefficienti in $\mathbb{K}$. Poniamo su questo insieme le cosiddette S- e D-equivalenze:

$$A \sim_S B \Leftrightarrow \exists T \in GL(n, \mathbb{K}) \; t.c. \; A = TB$$
$$A \sim_D B \Leftrightarrow \exists T \in GL(n, \mathbb{K}) \; t.c. \; A = BT$$

L'obiettivo di queste pagine è descrivere i quozienti

$$M(m, n, \mathbb{K}) / \sim_S \quad M(m, n, \mathbb{K}) / \sim_D$$

Per farlo poniamo innanzitutto $\tilde{A}_C$ e $\tilde{A}_R$ le matrici ottenute applicando l'algoritmo di Gauss completo, su colonne e su righe rispettivamente, ad A. L'obiettivo di queste pagine è quindi fornire una parziale dimostrazione a questo teorema

Teorema. $\mathrm{Im}(A)$ *è un invariante completo per* $M(m, n, \mathbb{K}) / \sim_D$ *e* $\tilde{A}_C$ *è l'unico rappresentante in forma normale. Viceversa* $\mathrm{Ker}(A)$ *è un invariante completo per* $M(m, n, \mathbb{K}) / \sim_S$ *e* $\tilde{A}_R$ *è l'unico rappresentante in forma normale*

Notiamo innanzitutto che se due matrici sono S-, D-equivalenti, allora sono SD-equivalenti, e quindi hanno lo stesso rango. Questo ci permette di poter dividere la dimostrazione in base al rango di A. Per semplicità considereremo solo il caso in cui A abbia rango massimo, anche se il teorema ha valenza più generale.

Soffermiamoci innanzitutto sulla D-equivalenza. Tramite opportuni lemmi riusciremo a ricondurci anche nel caso della S-equivalenza.

Innanzitutto ricordiamo che presa una matrice $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, allora $\tilde{A}_C$ è della forma

$$\tilde{A}_C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & \vdots & & & \vdots \\ * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \\ & & \text{etc.} & & \end{bmatrix} \tag{1}$$

dove il numero di pivot equivale al rango di A.

Essendo che siamo nel caso di rango massimo, $\text{rk}(A) = \min\{m, n\}$. Quindi se poniamo $L_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ la funzione indotta da A, allora

1. Se $m \leq n$, allora $\text{rk}(A) = m$ e L_A è suriettiva
2. Se $m \geq n$, allora $\text{rk}(A) = n$ e L_A è iniettiva
3. Se $m = n$, allora $\text{rk}(A) = m = n$ e L_A è biettiva

Dimostriamo per ora il caso immediato $m \leq n$.

Dimostrazione. $(\sim_D, m \leq n)$ In questo caso $\text{rk}(A) = m$, da cui grazie a (1) si ottiene che

$$\tilde{A}_C = \left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \end{array}\right]$$

e quindi

$$M_m(m, n, \mathbb{K}) / \sim_D = \{\left[\begin{array}{c|c} I_m & 0 \end{array}\right]\}$$

cioè l'insieme quoziente è ridotto al solo punto. Ma allora l'affermazione è banalmente dimostrata, in quanto tutte le matrici hanno la stessa immagine pari a $\mathbb{K}^m$; inoltre $[I_m|0]$ è l'unico rappresentante in forma normale. $\square$

Per analizzare invece il caso $m > n, rk(A) = n$, dobbiamo introdurre un concetto: il simbolo di Schubert.

Definizione. Data una matrice $A \in M_n(m, n, \mathbb{K})$, consideriamo $\tilde{A}_C$ della forma

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ s_1 \\ \\ \\ s_2 \\ \\ \\ \\ s_n
\end{array}
\left[\begin{array}{ccccc}
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
* & \vdots & & & \vdots \\
* & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & \vdots & & \vdots \\
* & * & 0 & \cdots & 0 \\
 & & \text{etc.} & & \\
 & & & &
\end{array}\right]
$$

Allora si definisce simbolo di Schubert come $\mathrm{Sch}(A) = (s_1, \ldots, s_n)$.

Detto questo suddividiamo per semplicità la dimostrazione in due teoremi. Incominciamo con questo:

Teorema 1. *Data una matrice A, $\mathrm{Sch}(A)$ è completamente determinato da $L = \mathrm{Im}(A)$.*

Dimostrazione. Per dimostrare ciò consideriamo la seguente famiglia di funzioni, con $0 \leq j \leq m$:

$$
\begin{aligned}
\psi_j\colon \quad & \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^m \\
& \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Notiamo che $\psi_0 = id$; definiamo inoltre $d_j = \dim \psi_j(L)$.

L'insieme L è invariante per l'algoritmo di Gauss sulle colonne, quindi $L = \mathrm{Span}(\tilde{A}_C^1, \ldots \tilde{A}_C^n)$. Ma allora è evidente che la stringa $(d_0, \ldots, d_m)$ possiede delle variazioni esattamente in corrispondenza dei s_i.

Si può allora concludere che $\mathrm{Sch}(A)$ è determinata dai $d_j = \dim \psi_j(L)$, cioè da L. $\square$

Dimostrato questo primo enunciato si può passare al secondo:

Teorema 2. *Data una matrice A, $\tilde{A}_C$ è determinata da L.*

Dimostrazione. Per dimostrare ciò consideriamo la seguente funzione, che dipende da $\mathrm{Sch}(A)$, il quale è però determinato da L.

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad & \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n \\ & \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_{s_1} \\ \vdots \\ x_{s_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che $\varphi|_L$ è un isomorfismo. Innanzitutto è un ovvio omomorfismo, dimostriamo che è biettiva.

Per farlo notiamo che $\tilde{A}_C^1, \dots, \tilde{A}_C^n$ fornisce una base di L in quanto il rango è massimo. Inoltre $\varphi(\tilde{A}_C^i) = e_i$, cioè φ manda una base di L in una base di $\mathbb{K}^n$. Quindi $\varphi|_L\colon L \to \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo.

Grazie a questo fatto possiamo affermare che $\tilde{A}_C^i = \varphi^{-1}(e_i)$, cioè $\tilde{A}_C$ è determinata da L. □

A questo punto siamo pronti per dimostrare il teorema nel caso in cui $m > n$.

Dimostrazione. ($\sim_D, m > n$) Siano due matrici A, B tale che $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$, allora $\tilde{A}_C = \tilde{B}_C$. Cioè $\tilde{A}_C$ è l'unico rappresentante in forma normale. Inoltre esistono $P, Q \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che

$$\begin{aligned} \tilde{A}_C &= AP \\ \tilde{B}_C &= BQ \end{aligned}$$

Quindi

$$A = \tilde{A}_C P^{-1} = \tilde{B}_C P^{-1} = B(QP^{-1}) \quad QP^{-1} \in GL(n, \mathbb{K})$$

che implica che $A \sim_D B$ che è quello che dovevamo dimostrare. □

Adesso ci manca da analizzare $\sim_S$. Per farlo ricordiamo i concetti di annullatore e centro:

Definizione. Sia V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale e W sottoinsieme di V. Allora definiamo annullatore di W come

$$\mathrm{Ann}(W) = \{\, f\colon V \to \mathbb{K} \mid f \text{ omomorfismo } t.c.\ f(w) = 0\ \forall w \in W \,\}$$

Definizione. Sia V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale e sia E un insieme di omomorfismi da V a $\mathbb{K}$. Allora definiamo il centro di E come

$$\mathrm{Z}(E) = \{\, v \in V \mid f(v) = 0\ \forall f \in E \,\}$$

La teoria degli annullatori e dei centri fa parte della teoria degli spazi duali. Per ora ricordiamo alcuni fatti che non dimostreremo:

Fatto 1. *Dati* $f_1, \dots, f_k \colon V \to \mathbb{K}$ *omomorfismi, allora*

$$\operatorname{Ann}\left[\bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(f_i)\right] = \operatorname{Span}(f_1, \dots, f_k)$$

Fatto 2. *Dato* W *sottoinsieme di* V*, e* E *insieme di omomorfismi da* V *a* $\mathbb{K}$ *allora*

$$\mathrm{Z}[\operatorname{Ann}(W)] = \operatorname{Span}(W)$$
$$\operatorname{Ann}[\mathrm{Z}(E)] = \operatorname{Span}(E)$$

A questo punto dimostriamo questo ultimo lemma che permetterà di dimostrare il teorema per $\sim_S$:

Lemma. *Date* $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$*, se* $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$ *allora* $\operatorname{Im}(A^T) = \operatorname{Im}(B^T)$

Dimostrazione. Per quello detto prima sappiamo che

$$\operatorname{Ann}\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ann}\left[\bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(A_i)\right] = \operatorname{Span}(A_1, \dots, A_m)$$

Quindi si ottiene che

$$\operatorname{Ker}(A) = \mathrm{Z}\left[\operatorname{Span}(A_1, \dots, A_m)\right]$$

Ma allora supponiamo che $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$ per due $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$. Allora

$$Z\left[\operatorname{Span}(A_1, \dots, A_m)\right] = \mathrm{Z}\left[\operatorname{Span}(B_1, \dots, B_m)\right] \Rightarrow$$
$$\operatorname{Span}(A_1, \dots, A_m) = \operatorname{Span}(B_1, \dots, B_m) \Rightarrow$$
$$\operatorname{Span}(A^{T,1}, \dots, A^{T,m}) = \operatorname{Span}(B^{T,1}, \dots, B^{T,m}) \Rightarrow$$
$$\operatorname{Im}(A^T) = \operatorname{Im}(B^T)$$

□

A questo punto possiamo concludere la dimostrazione del teorema:

Dimostrazione. ($\sim_S$) Supponiamo che $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B)$, allora per il lemma precedente $\operatorname{Im}(A^T) = \operatorname{Im}(B^T)$. Questo implica che $A^T \sim_D B^T$ e quindi $A \sim_S B$.

Inoltre $\tilde{A^T}_C = \tilde{B^T}_C$, da cui

$$\tilde{A}_R = (\tilde{A^T}_C)^T = (\tilde{B^T}_C)^T = \tilde{B}_R$$

Cioè $\tilde{A}_R$ è l'unico rappresentante in forma normale. Ciò conclude la dimostrazione. □

Questo teorema ci consente anche di rappresentare sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^m$; infatti consideriamo il seguente simbolo, con naturalmente $m \geq n$:

$$G_{m;n} = \{ \, W \subseteq \mathbb{K}^m \mid W \text{ sottospazio di dimensione } n \, \}$$

e questa funzione

$$\begin{aligned} \pi \colon M_n(m, n, \mathbb{K}) &\to G_{m;n} \\ A &\mapsto \operatorname{Im}(A) \end{aligned}$$

Essa non è iniettiva, tuttavia se consideriamo l'insieme

$$\mathbb{T}(m, n, \mathbb{K}) = \{\tilde{A}_C \in M_n(m, n, \mathbb{K})\}$$

e la funzione

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} \colon \mathbb{T}(m, n, \mathbb{K}) &\to G_{m;n} \\ \tilde{A}_C &\mapsto \operatorname{Im}(\tilde{A}_C) \end{aligned}$$

essa diventa una bigezione per il teorema precedente.

Inoltre si nota che $G_{m;n}$ può essere partizionato in dei sottoinsiemi interessanti. Consideriamo infatti

$$\mathbb{T}_s(m, n, \mathbb{K}) = \{\tilde{A}_C \in M_n(m, n, \mathbb{K}) \ t.c. \ \operatorname{Sch}(\tilde{A}_C) = s\}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_s \colon \mathbb{T}_s(m, n, \mathbb{K}) &\to G_{m;n} \\ \tilde{A}_C &\mapsto \operatorname{Im}(\tilde{A}_C) \end{aligned}$$

allora $P = \{\operatorname{Im}(\tilde{\pi}_s)\}_s$ è una partizione di $G_{m;n}$, con $\binom{m}{n}$ elementi.

Infine notiamo che $\mathbb{T}_s(m, n, \mathbb{K})$ non è un sottospazio di $M(m, n, \mathbb{K})$. Tuttavia esso è un sottospazio affine, la cui dimensione può essere calcolata, definendo J_s come la matrice i cui unici elementi non nulli sono i pivot, dove vale 1. Allora ponendo

$$\mathbb{J}_s(m, n, \mathbb{K}) = \mathbb{T}_s(m, n, \mathbb{K}) - J_s$$

si ottiene

$$\dim_a \mathbb{T}_s(m, n, \mathbb{K}) = \dim \mathbb{J}_s(m, n, \mathbb{K}) = \sum_{j=1}^{n} (m - s_j) - (n - j)$$

Notiamo che se $\operatorname{Sch}(A) = (1, \ldots, n)$ si ottiene una cella di dimensione massima pari a $n(m - n)$.

Quindi $G_{m;n}$ è l'unione disgiunta di pezzi di dimensione decrescente. Tuttavia cambiando coordinate in $\mathbb{K}^m$, si ottiene che io posso ricoprire $G_{m;n}$ tramite unione non disgiunta di pezzi di dimensione massima, corrispondenti a $\operatorname{Im}(\tilde{\pi}_{(1,\ldots,n)})$.

Esempio Adesso presentiamo un esempio per fare chiarezza su questa ultima parte. Sia quindi il piano $\mathbb{R}^2$ e consideriamo $G_{2;1}$ l'insieme di tutte le rette. Come sappiamo

$$G_{2,1} = \{\mathrm{Span}([1,y]^T) | -\infty < y < +\infty\} \cup \{\mathrm{Span}([0,1]^T)\}$$

Allora seguendo il discorso di prima notiamo che i possibili simboli di Schubert sono $(1),(2)$, di numero $\binom{2}{1}$. Allora questi due simboli di Schubert danno un partizionamento di $G_{2;1}$ pari a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\left[\tilde{\pi}_{(1)}\right] &= \tilde{\pi}_{(1)}\left[\mathbb{T}_{(1)}(m,n,\mathbb{R})\right] = \tilde{\pi}_{(1)}\left[\left\{ [1,y]^T \;\middle|\; -\infty < y < +\infty \right\}\right] \\
&= \left\{ \mathrm{Span}([1,y]^T) \;\middle|\; -\infty < y < +\infty \right\} \\
\mathrm{Im}\left[\tilde{\pi}_{(2)}\right] &= \tilde{\pi}_{(2)}\left[\mathbb{T}_{(2)}(m,n,\mathbb{R})\right] = \tilde{\pi}_{(2)}\left[\left\{ [0,1]^T \right\}\right] = \{\mathrm{Span}([0,1]^T)\}
\end{aligned}$$

Come si vede questo è in accordo con le nostre aspettative.