Seminario Benedetti

Mirko Torresani

17 settembre 2024

Sommario

Questo lavoro rappresenta una traduzione, e riscrittura, del lavoro di Luo, Schleimer e Tillman [LST08] sulle triangolazioni geodetiche ideali. Si ringrazia in particolare il Prof. Tillman per essersi reso disponibile a dei chiarimenti dall'Australia.

Epstain e Penner [EP88] riuscirono a dimostrare che una qualunque varietà iperbolica completa di volume finite non-compatta è suddivisibile in poliedri convessi geodetici, con tutti i vertici che appartengono alla sfera all'infinito di $\mathbb{H}^n$.

Successivamente, grazie ad un lavoro di [Koj92b] si estese il lavoro a varietà con bordo geodetico non vuoto, tale che il doppio è completo e di volume finito. Quello che si ottiene è una decomposizione in *poliedri geodetici parzialmente troncati.*

Quello che vogliamo provare sono i seguenti teoremi:

Teorema 1. *Una varietà iperbolica completa di volume finito non-compatta ha un ricoprimento regolare finito che ammette una triangolazione geodetica ideale embedded.*

Teorema 2. *Una varietà iperbolica con bordo non vuoto e totalmente geodetico, tale che il doppio sia completo e di volume finito, ha un ricoprimento regolare che ammette una triangolazione ideale parzialmente troncata geodetica embedded*

In verità, se ci restringiamo alle 3-varietà, Kojima [Koj92a] aveva già dimostrato che la decomposizione in poliedri troncati può essere raffinata con la proprietà che ogni poliedro ha al più 1 vertice ideale. Dalla dimostrazione dei Teoremi 1 e 2 otteniamo quindi il seguente risultato analogo.

Teorema 3. *Ogni* 3*-varietà iperbolica compatta di volume finito di bordo non vuoto e totalmente geodetico ha un ricoprimento regolare che ammette una decomposizione in tetraedri geodetici parzialmente troncati, ognuno dei quali ha al più un vertice ideale.*

1 Fatterelli Introduttivi

Riferiamoci al modello proiettivo B^n di $\mathbb{H}^n$, e seguiamo [Koj92b]. Il modello si costruisce considerando la proiezione radiale con centro l'origine, per proiettare l'iperboloide $\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = -1\} \subseteq \mathbb{R}^{n,1}$ sul piano $\{x_{n+1} = 1\}$. L'immagine è la palla B^n. Inoltre, le rette sul cono di luce $L := \{x_{n+1}^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2\}$ passanti per l'origine si possono naturalmente identificare con S^{n-1}, pensato come la sfera all'infinito $\partial\mathbb{H}^n$. Infine, un qualunque punto sul cono duale $H_+ := \{x_1^2 + \cdots + x_n^2 - x_{n+1}^2 = 1\}$ si proietta in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B^n}$. Le rette passanti per l'origine e contenute in $\{x_{n+1} = 0\}$ costituiscono una naturale identificazione per $\mathbb{R}P^n \setminus \overline{B^n}$.

1.1 Decomposizione in Poliedri

Consideriamo quindi una n-varietà iperbolica M non-compatta, completa, di volume finita. Allora è noto [Mar, Cor. 4.2.18] che M è la parte interna di una varietà iperbolica compatta. In particolare, $\Gamma := \pi_1(M)$ è universalmente presentato.

Inoltre, il rivestimento universale $\widetilde{M}$ è identificabile con $\mathbb{H}^n$, e $\Gamma \leq \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n) = SO^+(n,1)$. In questo scenario, i punti di cuspide sono gli elementi $v \in L$, autovalori delle trasformazioni paraboliche in Γ. Inoltre, $\mathrm{Stab}_\Gamma(v)$ dà il gruppo fondamentale della sezione orosferica (questo fatto viene ripreso, per esempio, in [McR04] e credo in [Rat94]).

Epstain e Penner [EP88] costruirono un particolare sottoinsieme discreto $\mathcal{B}$ di L, e ne considerarono l'inviluppo convesso. Questo particolare inviluppo convesso si proietta su B^n, e fornisce una tassellazione Γ-invariante di $\mathbb{H}^n$, con tutti i vertici localizzati su $\partial\mathbb{H}^n$. Come conseguenza, la tassellazione passa al quoziente e descrive una decomposizione in poliedri geodetici di M.

1.2 Decomposizione in Poliedri Parzialmente Troncati

Consideriamo invece il caso in cui M è una varietà iperbolica con bordo non vuoto e totalmente geodetico, tale che il doppio sia completo e di volume finito. In questo contesto, il doppio $\mathcal{D}(M)$ ha rivestimento universale $\mathbb{H}^n$. Come conseguenza, il rivestimento universale $\widetilde{M}$ si può vedere un'intersezione della forma $\bigcap_\beta (S_\beta^+ \cap \mathbb{H}^n)$, dove S_β^+ è un semispazio associato ad un iperpiano lineare S_β contente una componente di $\partial\widetilde{M}$. Siccome $\widetilde{M}$ è una sottovarietà Riemanniana di $\mathbb{H}^n$, i gruppo Γ può ancora essere visto come sottogruppo di $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$. **Non è detto che sia finitamente generato però**.

Quello che è vero è che esiste una inclusione $\pi_1(M) \hookrightarrow \pi_1(\mathcal{D}(M))$, data dal fatto che la naturale inclusione $M \hookrightarrow \mathcal{D}(M)$ ha una naturale inversa sinistra.

Come già detto, Kojima [Koj92b] capì come suddividere anche questo tipo di varietà. Per fare ciò conviene introdurre il concetto di *poliedro parzialmente troncato.*

Definizione 4. Sia $v \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}^n$. Definiamo la polare $H(v)$ rispetto a v come l'iperpiano affine, parallelo all'ortogonale di v, tale che

$$H(v) \cap \partial B^n = \{x \in \partial B^n \mid \text{ la retta } r(x,v) \text{ è tangente a } B^n\} .$$

Sia $\hat{P}$ una n-poliedro in $\Pi = \{x_{n+1} = 1\}$ convesso euclideo tale che

(1) ogni vertice è *ideale* o *iperideale*;

(2) i vertici ideali sono contenuti in ∂B^n;

(3) i vertici iperideali sono contenuti in $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}^n$;

(4) ogni faccia di codimensione 2 interseca $\overline{B}^n$.

Allora possiamo ottenere un poliedro geodetico convesso $P \subseteq B^n$ troncando $\hat{P}$ lungo gli iperpiani $\{H(v)\}_{v \text{ iperideale}}$.

Il poliedro P è un *poliedro geodetico parzialmente troncato*, e $\hat{P}$ è il *fellow affine* di P. Combinatorialmente, P è ottenuto da $\hat{P}$ rimuovendo stelle aperte disgiunte per ogni vertice iperideale, e rimuovendo ogni vertice ideale.

Una suddivisione di $\hat{P}$ in n-simplessi che non introduce nuovi vertici determina univocamente una decomposizione in *n-simplessi geodetici parzialmente troncati*

Nello stesso spirito di Epstain e Penner, Kojima costruisce un insieme discreto $\mathcal{B}$ in H_+, e ne considera la combinazione convessa $\mathcal{H}_\mathcal{B}$. Infine, $\mathcal{H}_\mathcal{B}$ viene suddivisa ulteriormente in una decomposizione finale $\mathcal{V}$. L'intersezione tra la proiezione di $\mathcal{V}$ e la proiezione di $\widetilde{M}$ dà una decomposizione di $\widetilde{N}$ in B^n in poliedri parzialmente troncati, che inoltre è Γ-equivariante. Questa decomposizione discende quindi a M.

Inoltre, le cuspidi interne provengono dai vertici ideali, le componenti di bordo dai troncamenti sui vertici iperideali, e le ∂-cuspidi da intersezione tra S^{n-1} e facce di codimensione 2 di un poliedro (cioè l'intersezione di due facce di codimensione 1 e S^{n-1}).

Infine, il gruppo fondamentale di una componente di bordo X si può vedere come il sottogruppo $\mathrm{Stab}_\Gamma(v)$, con v un vertice iperideale associato ad un sollevamento di X a $\partial\widetilde{M}$.

2 Sottogruppi Separabili

Consideriamo una n-varietà iperbolica M come sopra. Per ora supponiamo che M sia orientabile.

Definizione 5. Un gruppo G si dice *residualmente finito* se ogni $g \in G$ diverso dall'identità non è contenuto in un qualche sottogruppo normale di indice finito.

Definizione 6. Un sottogruppo $H \leq G$ è *separabile* in G se per ogni $\gamma \notin H$ esiste un sottogruppo $K \leq G$ di indice finito che contiene H ma non γ.

Definizione 7. Un sottogruppo di $\pi_1(M)$ si dice *periferico* se è coniugato al gruppo fondamentale di componente di bordo geodetica, di una cuspide o di una ∂-cuspide.

Lemma 8. *Dato un anello di Jacobson R ed una R-algebra S finitamente generata, allora*

(1) S è anello di Jacobson;

(2) per ogni ideale massimale Q di S, $P = Q \cap R$ è un ideale massimale di R;

(3) $[R/P : S/Q] < \infty$.

Lemma 9 (Malcev–Selberg)**.** *Un gruppo finitamente generato e lineare è residualmente finito.*

Dimostrazione. Sia $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ finitamente generato come gruppo. Possiamo organizzare $G \subseteq GL_n(\mathcal{R})$, dove $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ è il sottoanello di $\mathbb{C}$ generato dalle entrate di un insieme finito di generatori per G. Siccome $\mathcal{R}$ è finitamente generato come anello, è una $\mathbb{Z}$-algebra finitamente generata come algebra.

Quindi $\mathcal{R}/\mathcal{Q}$ è una finita estensione di $\mathbb{Z}/\mathfrak{m}$, con $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di $\mathbb{Z}$. In particolare, $\mathcal{R}/\mathcal{Q}$ è finito.

Possiamo quindi considerare un morfismo di riduzione $\phi_{\mathcal{Q}} \colon GL_n(\mathcal{R}) \to GL_n(\mathcal{R}/\mathcal{Q})$. Per come abbiamo scelto $\mathcal{Q}$, g non appartiene al nucleo di questa mappa. $\square$

Come conseguenza simpatica abbiamo che $GL_n(\mathbb{Z})$ è residualmente finito.

Proposizione 10. *Il gruppo $\pi_1(M, x)$ è residualmente finito sia che M sia da Teorema 1 che da Teorema 2.*

Dimostrazione. Se M non ha bordo, allora $\pi_1(M)$ è un sottogruppo finitamente presentato di $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$. Quindi è residualmente finito per il Lemma 9.

Se $\partial M \neq \emptyset$, allora concludiamo tramite il doppio $D(M)$ in quanto la residuale finitezza passa ai sottogruppi. $\square$

Possiamo dimostrare una prima separabilità. Copiamo il risultato da [LN91]. Osserviamo che in esso si cita un lavoro di Hempel sulla residuale finitezza dei gruppi fondamentali di 3-varietà. Noi non possiamo usarlo, in quanto stiamo parlando di n-varietà.

Lemma 11. *Considera un automorfismo $\vartheta\colon G \to G$ di un gruppo residualmente finito. Allora $H := \mathrm{Fix}(\vartheta)$ è separabile.*

Dimostrazione. Consideriamo un certo $g \in G \setminus H$. Allora $g^{-1}\,\vartheta(g) \neq 1$. Per residuale finitezza sappiamo che esiste un morfismo $f\colon G \to F$ in un gruppo finito, con la particolarità che $f(g^{-1}\,\vartheta(g)) \neq 1$. In particolare, $f(\vartheta(g))$ non coincide con $f(g)$.

Consideriamo la mappa $\xi\colon G \to F \times F$, data da $h \mapsto (f(h), f(\vartheta(h))$; sia K il suo nucleo.

Siccome $H = \mathrm{Fix}(\vartheta)$, allora l'immagine di $\xi_{|_H}$ è contenuta nella diagonale Δ_F. D'altra parte, $\xi(g) \notin \Delta_H$. In conclusione, HK è un sottogruppo di G, di indice finito in quanto contiene K, che contiene H; inoltre esso evita g in quanto $g \notin \xi(H)$ e $K = \mathrm{Ker}(\xi)$. ☐

Lemma 12. *Ogni elemento del prodotto amalagamato $A *_C B$ si scrive come $a_1 b_1 \dots a_n b_n c$.*

Lemma 13. *Sia un prodotto amalgamato $A *_C B$, dove $C \hookrightarrow A, B$. Ogni scrittura $g_1 \dots g_n$ di elementi di A o B, alternati, con $g_1 \neq 0$ e $g_{i>1} \notin C$, non è l'elemento neutro. In particolare vi è un immersione $A, B \hookrightarrow G$.*

Dimostrazione. Fatti standard che si possono trovare in [SW79] e [LS01, pp. 186–187]. ☐

Proposizione 14 (Long-Niblo)**.** *Sia X una componente di ∂M totalmente geodetica. Si scelga un punto base $x \in X$. Allora $\pi_1(X, x)$ è un sottogruppo separabile di $\pi_1(M, x)$.*

Dimostrazione. Consideriamo il doppio lungo X, $D = D_X(M)$, e sia la ovvia involuzione $D \to D$. Questa induce un automorfismo ϑ del gruppo fondamentale $G = \pi_1(D, x)$. Vogliamo provare che $\mathrm{Fix}(\vartheta)$ coincide esattamente con $\pi_1(X, x)$.
Sia $h \in \mathrm{Fix}(\vartheta)$, e sia $\omega = a_1 \dots a_n b$ una forma ridotta nel prodotto amalgamato $G = A_+ *_B A_-$, con $A = \pi_1(M, x)$ e $B = \pi_1(X, x)$. Supponiamo che $a_1 \in A_+ \setminus B$. Allora $\vartheta(\omega)$ coincide con $\vartheta(a_1) \dots \vartheta(a_n) b$, e quest'ultima è ancora una parola per ω, ma con $\vartheta(a_1) \in A_- \setminus B$. Questo è assurdo, in quanto otterremo una parola che viola il teorema precedente.

Quindi a_1 appartiene a B, e si può chiudere con induzione.

Quindi per ogni $g \in \pi_1(M, x) \setminus \pi_1(X, x)$ esiste un sottogruppo K di G, di indice finito, che contiene $\pi_1(X, x)$ ma non g. Di conseguenza, $K \cap A_+$ è il sottogruppo di indice finito di A_+ di cui necessitiamo. ☐

Proposizione 15. *Sia X una sezione orosferica di una cuspide o ∂-cuspide di M. Scelto un punto base $x \in X$, allora $\pi_1(X, x)$ è separabile in $\pi_1(M, x)$.*

Dimostrazione. La citazione originale puntava al libro di Ratcliffe [Rat94].

La dimostrazione si può trovare scritta per bene in [McR04]. Tuttavia è estremamente laboriosa anche solo da capire. ☐

Teorema 16 (Long-Niblo)**.** *Sia M una varietà iperbolica di volume finito, non-compatta o compatta e con bordo totalmente geodetico. Allora ogni sottogruppo periferico di M è separabile in $\pi_1(M)$.*

Dimostrazione. Se M è orientabile, abbiamo concluso. Altrimenti, sia $\Gamma_0 \leq \Gamma$ un sottogruppo di indice 2 corrispondente al gruppo fondamentale del rivestimento doppio orientato. Allora, ogni sottogruppo $H \leq \Gamma$ è separabile in Γ se e solo se $H \cap \Gamma_0$ è separabile in Γ_0. Infine, se H è un gruppo periferico di Γ, allora $H \cap \Gamma_0$ è un gruppo periferico di Γ_0. $\square$

3 La costruzione "tirante"

Sia $(\mathcal{C}, \Phi)$ una decomposizione geodetica parzialmente troncata di M; i.e. $\mathcal{C}$ è un'unione disgiunta di poliedri geodetici parzialmente troncati, e ogni elemento di Φ è un accoppiamento isometrico di facce, e $M = \mathcal{C}/\Phi$. L'insieme $\mathcal{C}$ è finito; ciò può essere visto dal fatto che decomposizioni CW di una varietà compatta sono sempre finite, o anche dal fatto che i vertici di $\mathcal{C}$ sono le cuspidi, che sono in numero finito.

$(\mathcal{C}, \Phi)$ solleva ad una decomposizione Γ-equivariante di $\widetilde{M} \subseteq B^n$, e per ogni $P \in \mathcal{C}$ si può scegliere un sollevamento isometrico $\tilde{P}$ in B^n, e quindi un fellow affine $\hat{P} \subseteq \mathbb{R}P^n$. I vertici iperideali di $\hat{P}$ corrispondono a componenti di bordo totalmente geodetico di M, i vertici ideali a cuspidi interni, e le intersezioni di intersezioni di facce di codimensione 2 di $\hat{P}$ con ∂B^n a ∂-cuspidi.

Sia $\hat{\mathcal{C}} = \bigsqcup\{\hat{P}\}$, vedendo $P \subseteq \hat{P}$. La decomposizione di M induce accoppiamenti $\hat{\Phi}$ tali che M è ottenuta dalla pseudo-varietà $\hat{M} = \hat{\mathcal{C}}/\hat{\Phi}$ eliminando i vertici ideali e le stelle aperte dei vertici iperideali.

Ora che abbiamo capito come sollevare $(\mathcal{C}, \Phi)$, dobbiamo capire quando abbiamo raggiunto una decomposizione "buona".

Proposizione 17. *Supponiamo che nessun poliedro in $\hat{\mathcal{C}}$ abbia due vertici distinti identificati in $\hat{M}$. Allora M ha una triangolazione geodetica parzialmente troncata embedded.*

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che esite una suddivisione di $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\Phi})$ tale che

(1) ogni poliedro di $\hat{\mathcal{C}}$ è simpliciamente diviso in n-simplessi affini senza introdurre nuovi vertici;

(2) gli elementi di $\hat{\Phi}$ si restringono ad accoppiamenti di facce simpliciali rispetto alla suddivisione.

Scegliamo un ordinamento delle cuspidi e dei bordi totalmente geodetici di M. Questo determina un ordinamento ben definito dello 0-scheletro di $\hat{M}$, e per ogni poliedro di $\hat{\mathcal{C}}$ anche dei vertici di quest'ultimo.

Sia $P \in \mathcal{C}$, e nominiamo i suoi vertici $v_0, v_1, \dots, v_k$ tale che $v_i > v_j$ se $i < j$. Suddividiamo $\hat{P}$ attraverso un cono con centro v_0 su ogni elemento dell'i-scheletro di $\hat{P}$, $0 \leq i \leq n-1$, che non contiene v_0. Il risultato è un collezione di poliedri $\mathcal{P}_0$, insieme a degli accoppiamenti di facce Φ_0, tale che $\hat{P} = \mathcal{P}_0/\Phi_0$.

Procediamo ora induttivamente. Dato $\mathcal{P}_j$ e Φ_j, dividiamo ogni poliedro in $\mathcal{P}_j$ contenente v_{j+1}: effettuiamo un conto con centro v_{j+1} sugli elementi dell'i-scheletro, $0 \leq i \leq n-1$, che non contengono v_{j+1}. Questo risulta in una collezione $\mathcal{P}_{j+1}$, insieme a degli accoppiamenti ben definiti Φ_{j+1} tali che $\hat{P} = \mathcal{P}_{j+1}/\Phi_{j+1}$.

Dobbiamo provare che $\mathcal{P}_k$ è una collezione di n-simplessi.
Sia $Q \in \mathcal{P}_k$, e supponiamo che v_h sia il suo vertice più piccolo (i.e. h è l'indice più grande). Allora Q è il cono con centro v_h su una faccia $(n-1)$-dimensionale F^{n-1} non contenente v_h. La faccia F^{n-1} è il cono sul suo vertice più piccolo di una faccia $(n-2)$-dimensionale F^{n-2} non contenente quel vertice. Segue induttivamente che Q ha esattamente $n+1$ vertici.

Siano $\hat{P}, \hat{P}' \in \hat{\mathcal{C}}$ con facce top-dimensionali $\hat{F}, \hat{F}'$ ed un accoppiamento $\phi \in \hat{\Phi}$ tale che $\phi(\hat{F}) = \hat{F}'$. Le rispettive suddivisioni di $\hat{F}$ e $\hat{F}'$ in $(n-1)$-simplessi ideali dipendono unicamente dall'ordine dei loro vertici; ergo ϕ è simpliciale rispetto alla suddivisione, e si restringe ad un accoppiamento di facce per ognuno degli n-simplessi della suddivisione.

Infine, la decomposizione risultante di $\hat{M}$ è simpliciale siccome ogni n-simplesso non ha due vertici identificati. $\square$

4 Dimostrazione del Teorema Principale

La azione di Γ su $\overline{B}^n$ si estende su $\mathbb{R}P^n \backslash \overline{B}^n$ attraverso l'azione sugli iperpiani. In particolare, se $v \in \hat{P}$ è un vertice, allora il sottogruppo $\mathrm{Stab}_\Gamma(v) \leq \Gamma$ è periferico.

Definizione 18. Definiamo *l'insieme delle diagonali* $\Delta(M) \subseteq \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n$ come

$$\Delta(M) = \{(v, w) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n \mid \exists P \in \mathcal{C} \text{ t.c. } v \text{ e } w \text{ sono vertici distinti di } \hat{P}\}$$

Notiamo che $\Delta(M)$ è necessariamente finito, in quanto $\mathcal{C}$ è finito.

Definizione 19. Una diagonale $(v, w) \in \Delta(M)$ si dice *ritornante* se esiste un certo $\gamma \in \Gamma$ tale che $\gamma v = w$. Sia $R(M) \subseteq \Delta(M)$ l'insieme delle diagonali ritornanti

Osserviamo che la costruzione tirante può essere applicata a $\hat{C}$ solo se non esiste una diagonale ritornante.

Osservazione 20. Se $p\colon N \to M$ è un ricoprimento finito, allora la decomposizione $(\mathcal{C}, \Phi)$ si solleva ad una decomposizione di N, e possiamo considerare il relativo insieme di diagonali per N. Se un certo $P \in \mathcal{C}$ si solleva a $P_1, \dots, P_k$, allora possiamo scegliere $\hat{P} = \hat{P}_1$. In particolare, possiamo assumere che $\Delta(M) \subseteq \Delta(N)$. Ogni altro elemento di $\Delta(N)$ è contenuto in $\Gamma \cdot \Delta(M)$.

Supponiamo ora che $(v, w) \in \Delta(M)$ sia una diagonale ritornante.

Lemma 21. *Esiste un ricoprimento finito $p\colon N_{(v,w)} \to M$, non necessariamente regolare, tale che $(v, w) \in \Delta(N_{(v,w)})$ non è una diagonale ritornante.*

Dimostrazione. Siccome (v, w) è una diagonale ritornante per M, esiste un $\gamma \in \Gamma$ tale che $\gamma v = w$. In particolare, siccome v e w sono distinti, $\gamma \notin \mathrm{Stab}_\Gamma(v)$.

Siccome $\mathrm{Stab}_\Gamma(v)$ è un sottogruppo periferico, per il Teorema 16 è separabile. Quindi esiste un $K \leq \Gamma$ che contiene $\mathrm{Stab}_\Gamma(v)$ e non contiene γ. Denotiamo con $p\colon N_{(v,w)} \to M$ il ricoprimento tale che $N_{(v,w)} = \widetilde{M}/K$.

Supponiamo per assurdo che $(v, w) \in \Delta(N_{(v,w)})$ sia una diagonale ritornante. Allora esiste $\delta \in K$ tale che $\delta v = w$. Ergo $\gamma^{-1}\delta \in \mathrm{Stab}_\Gamma(v) \leq K$. Questo implica che $\gamma \in K$, assurdo. □

Lemma 22. *Se $p\colon N \to M$ è un ricoprimento regolare che fattorizza lungo $N_{(v,w)}$, allora nessun elemento dell'orbita $\Gamma \cdot (v, w)$ può essere una diagonale ritornante.*

Dimostrazione. Sia $N \to N_{(v,w)} \to M$ è una fattorizzazione di p. Siccome (v, w) non è una diagonale ritornante per $N_{(v,w)}$, non lo è per N (i gruppi fondamentali si riducono al salire dell'estensione).

Sia ora un elemento $(\gamma v, \gamma w) \in \Gamma \cdot (v, w)$, e supponiamo che sia ritornante. Allora esiste $\delta \in \pi_1(N)$ tale che $\delta\gamma v = \gamma w$, cioè $\gamma^{-1}\delta\gamma v = w$. Siccome $\pi_1(N)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(M)$, allora $\gamma^{-1}\delta\gamma \in \pi_1(N)$. Ma (v, w) non è una diagonale ritornante per N, assurdo. □

Possiamo quindi completare la dimostrazione.

Dimostrazione dei Teoremi 1 e 2. Per ogni diagonale ritornante $(v, w) \in \Delta(M)$ scegliamo un ricoprimento finito $N_{(v,w)} \to M$ dal Lemma 21. Questo procedura fornisce una collezione $\{N_{(v,w)}\}_{R(M)}$.

Grazie alla corrispondenza sottogruppi-ricoprimenti possiamo passare ad un ricoprimento regolare finito comune $N \to M$. Infatti, se $K_1, \dots, K_n \leq \pi_1(M)$ corrispondono a tali ricoprimenti, basta porre $N = \widetilde{M}/K$, con K il nucleo normale di $\bigcap K_i$.

Per il Lemma 22 e l'Osservazione 20 sappiamo che N non ha diagonali ritornanti.

In definitiva la decomposizione $(\mathcal{C}, \Phi)$ di M si solleva ad una decomposizione in poliedri di N, a cui possiamo applicare la costruzione tirante della Proposizione 17. □

Riferimenti bibliografici

[EP88] D. B. A. Epstain e R. C. Penner. «Euclidean decomposition of noncompact hyperbolic manifold». In: *J. Differential Geom.* 27.1 (1988), pp. 67–80.

[Koj92a] S. Kojima. «Polyhedral decomposition of hyperbolic 3-manifolds with total geodesic boudary». In: *Aspects of low-dimensional manifolds*. Adv. Stud. Pure Math. 20. 1992, pp. 93–112.

[Koj92b] S. Kojima. «Polihedral decomposition of hyperbolic manifolds with boundary». In: *On the geometric structure of manifolds*. Proc. of Workshop in Pure Math. 10, part III. 1992, pp. 37–57.

[LN91] D. D. Long e G. A. Niblo. «Subgroup separability and 3-manifold groups». In: *Math. Z.* 207.2 (1991), pp. 209–215.

[LS01] R. C. Lyndon e P. E. Schupp. *Combinatorial Group Theory*. 2001.

[LST08] F. Luo, S. Schleimer e S. Tillmann. «Geodesic ideal triangulations exist virtually». In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 136.7 (2008), pp. 2625–1630.

[Mar] B. Martelli. *An introduction to geometric topology*. `people.dm.unipi.it/martelli/Geometric_topology.pdf`.

[McR04] D. B. McReynolds. «Peripheral separability and cusps of arithmetic hyperbolic orbifolds». In: *Algebraic and Geometric Topology* 4 (2004), pp. 721–755.

[Rat94] J. G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer-Verlag, 1994.

[SW79] P. Scott e C. T. C. Wall. «Topological methods in group theory». In: *Homological group theory*. ondon Mathematical Society Lecture Note Series 36. 1979, pp. 137–203.