Seminario Coxeter

Mirko Torresani

4 luglio 2024

Sommario

Seminario sulla shellibilità di complessi psuedosimpliciali che sono topologicamente 3-sfere. Tratto dall'articolo [Vin85].

1 Introduzione

Il concetto di complesso psuedosimpliciale è noto dal 1962, come si può trovare in [HS62].

Nel 1974 [DK74] venne dimostrato che una pseudovarietà d-dimensionale shellabile è una d-palla o una d-sfera .

Riguardo all'altra implicazione sappiamo che

(1) Per $d \geq 3$ ci sono d-palle che non si shellano [Bin64; Rud58];

(2) Ogni 2-sfera e 2-palla è shellabile [Bin64];

(3) Ogni d-sfera convessa (i.e. bordo simpliciale di un $(d+1)$-politopo) è shellabile [BM71];

(4) Per $d \geq 5$ ci sono d-sfere che non si shellano [Edw75].

In particolare, se ogni 3-sfera topologica fosse shellabile si avrebbe una dimostrazione facile della Congettura di Poincaré. Più avanti vedremo meglio questo fatto.

2 n-Grafi e Complessi

Definizione 2.1. Un n-grafo è un grafo $(V(G), E(G))$, con una mappa $c\colon E \to I$, ed $I = \{1, \dots, n\}$.

Definizione 2.2. Definiamo $G(J)$ come il sottografo dato dai J-vertici. Ogni componente connessa di $G(J)$ è detta *residuo di tipo* $I \setminus J$.

Definizione 2.3. Un simplesso pseudosimpliciale Δ è un complesso CW, le cui celle sono simplessi (i.e. immagini omeomorfe di simplessi geometrici dotati di una struttura facciale).

Definizione 2.4. Un complesso pseudosimpliciale si dice *puro* se tutti i simplessi massimi hanno la stessa dimensione finita. Tali simplessi si dicono *faccette*.

Possiamo definire senza problemi uno shelling di un complesso pseudosimpliciale.

Definizione 2.5. Una *pseudovarietà* è un complesso pseudosimpliciale puro tale che

(1) ogni codimensione 1 simplesso è contenuto in 1 o 2 faccette;

(2) per ogni coppia di faccette s e s' c'è una sequenza finita di faccette $s = s_1, s_2, \ldots, s_m = s'$ tale che s_j e s_{j+1} hanno in comune una faccia di codimensione 1.

Il bordo di una pseudovarietà è il sottocomplesso dato dai simplessi di codimensione almeno 1 contenuti in esattamente 1 faccetta.

È noto che una pseudovarietà d-dimensionale shellabile è una d-palla o una d-sfera [DK74].

Indichiamo con sd la suddivisione baricentrica, e con $=$ 'isomorfismo di complessi pseudoprincipali.

Vogliamo associare ad un n-grafo G una pseudovarietà ΔG $(n-1)$-dimensionale.

Per ogni $v \in V(G)$ sia Δv il simplesso chiuso Euclideo di dimensione $(n-1)$. C'è una bigezione tra i vertici di Δv e I.

Definizione 2.6. Per ogni faccia s di Δv, definiamo *il tipo di* s come l'immagine dei vertici di s tramite la suddetta bigezione.

Inoltre, sia

$$K = \bigsqcup_{v \in V(G)} \Delta v$$

e identifichiamo due simplessi $s \subseteq \Delta v$ e $s' \subseteq \Delta v'$ dello stesso tipo J se e solo se v è $I \setminus J$-adiacente a v'. Poniamo $\Delta G := K/\sim$.

Teorema 2.7. *Se G è un n-grafo, allora*

(1) ΔG è una pseudovarietà;

(2) ΔG è senza bordo se e solo se G è regolare;

(3) ΔG è orientabile se e solo se G è bipartito.

C'è una corrispondenza tra l'insieme dei simplessi di ΔG e l'insieme dei residui propri di G. Per un residuo R di tipo J in G, considera le faccette di K: $\{\Delta v \mid v \in V(R)\}$. Loro condividono una faccia di tipo J in comune; chiamiamola δR.

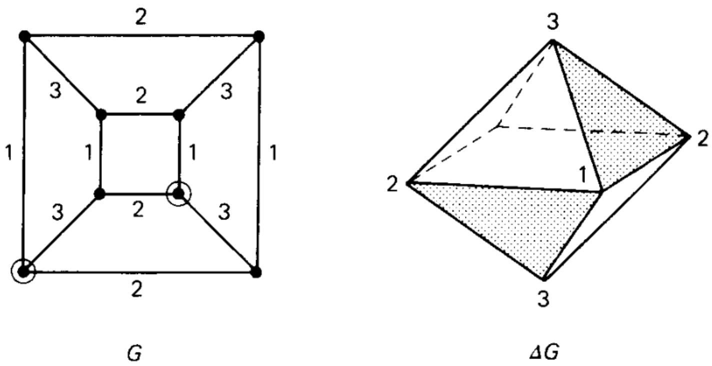


Figura 1: Esempio di costruzione di ΔG

Teorema 2.8. *Se G è un n-grafo, c'è una bigezione δ tra l'insieme dei residui propri di G e l'insieme dei simplessi chiusi di ΔG tale che per ogni coppia di residui R e R' vale*

(1) $\operatorname{type} \delta R = \operatorname{type} R$;

(2) $R \subseteq R'$ se e solo se $\delta R \supseteq \delta R'$.

Quali spazi topologici sono dei ΔG?

Teorema 2.9. *Sia Δ una pseudovarietà $(n-1)$-dimensionale finita tale che il link di ogni simplesso di codimensione > 1 è connesso. Allora esiste un n-grafo tale che $\Delta G = \operatorname{sd} \Delta$.*

Dimostrazione. Definiamo una funzione c dall'insieme dei vertici di $\operatorname{sd} \Delta$ a $I = \{1, \ldots, n\}$ tale che $c(v) = i$, con $i - 1$ è la dimensione del simplesso in Δ corrispondente a v nella costruzione di $\operatorname{sd} \Delta$.

Consideriamo ora un n-grafo G costruito come segue. I punto di G sono le facce di $\operatorname{sd} \Delta$. Due punti di G sono collegato da un arco colorato i se e solo se le faccette corrispondenti condividono un simplesso, di codimensione 1, con c-valori in $I \setminus \{i\}$. Per tale G abbiamo $\operatorname{sd} \Delta = \Delta G$. □

Sappiamo da Moise [Moi52] che ogni 2 e 3 varietà è PL. Inoltre, è noto che

Teorema 2.10. *Data un poliedro K*[1]*, sono equivalenti:*

(1) K ha una struttura PL;

(2) tuti i link dei punti sono omemorfi a S^{n-1}.

[1] i.e. ogni punto $x \in K$ c'è un numero finito di simplessi geometrici in K tale che la loro unione contiene x

Ergo:

Teorema 2.11. *Se M è una 3-varietà (2-varietà) chiusa, allora esiste un 4-grafo (3-grafo), tale che ΔG è omeomorfo a M.*

3 Shellabilità

Definizione 3.1. Un vertice $v \in V(G)$ è *debolmente shellabile* se $\langle R \setminus v \rangle$ è connesso per ogni residuo di rango 2. Equivalentemente, se per ogni $i, j \in I$ e $u, u' \in V(G) \setminus \{v\}$, con u $\{i.j\}$-adiacente a u', u è $\{i, j\}$-adiacente a u' in $\langle G \setminus v \rangle$.

Un vertice v si dice *fortemente shellabile* se appartiene ad un residuo regolare di rango pari alla valenza di v.

Definizione 3.2. Un n-grafo è *debolmente/fortemente shellabile* se esiste un ordinamento dei vertici $\{v_1, \ldots, v_N\}$ tale che v_k è debolemente/fortemente shellabile in $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

In Figura 2a, tutti i vertici sono sia fortemente che debolmente shellabili.

In Figura 2b nessun punto è in alcun modo shellabile.

In Figura 2c il vertice v è debolmente, ma non fortemente shellabile.

Lemma 3.3. *L'essere debolmente/fortemente shellabile passa ai residui*

Proposizione 3.4. *Se un vertice è fortemente shellabile, allora lo è debolmente.*

Dimostrazione. Supponiamo che v sia un punto fortemente shellabile, e siano u_1 e u_2 in $\langle G \setminus v \rangle$ $\{i, j\}$-adiacenti.

Se questo cammino non passa da v, allora abbiamo già concluso.

Se questo cammino passa da v, dobbiamo dimostrare che esiste un $\{i, j\}$-cammino non passante per v che connette u_1 e u_2.
Consideriamo a tal scopo il residuo R di tipo $I \setminus \{i.j\}$. Esso è un segmento o una circonferenza. Se per assurdo fosse un segmento allora i vertici terminali avrebbero R-valenza 1. Ma siccome v è fortemente shellabile, esso appartiene ad un certo residuo regolare R' di grado pari alla G-valenza di v. In particolare, R può essere visto dentro R', e R' è di tipo $I \setminus J$, con $\{i, j\} \subseteq J$. Ma siccome R ammette vertici terminali quest'ultimi non hanno valenza massima in R'. $\square$

Lemma 3.5. *Se $v \in V(G)$ è debolmente shellabile, allora*

(1) $\langle R \setminus v \rangle$ è conesso per ogni residuo R;

(2) l'insieme dei reisdui di $\langle G \setminus v \rangle$ è $\{\langle R \setminus v \rangle\}_R$.

Dimostrazione. La seconda discende dal primo.

Supponiamo per assurdo che $\langle R \setminus v \rangle$ è disconnesso per qualche residuo R. Allora esistono due punti, $u, w \in V(G)$, entrambi adiacenti a v, che stanno in due componenti diverse di $\langle R \setminus v \rangle$. Se $c([u,v]) = i$ e $c([w,v]) = j$, e R_2 è il residuo di tipo $\{i,j\}$ contenente v, allora $\langle R_2 \setminus v \rangle$ è disconnesso. Assurdo. $\square$

Per ogni n-grafo G, introduciamo il sottoinsieme $L_G \subseteq V(G)$ dei vertici di valenza minore di n. Poniamo su L_G l'equivalenza generata dalla seguente relazione: $u \sim v$ se sono vertici terminali di un residuo di rango 2.

Questa equivalenza ha una proprietà importante: siccome i residui di rango 2 sono archi, vale che se u è in relazione a v tramite un residuo di tipo $\{i,j\}$, allora non può esserlo a nessun altro con lo stesso residuo.
Per comodità indichiamo $L_{\langle G \setminus w \rangle}$ con L_w

Lemma 3.6. *Se w è debolmente shellabile, allora $L_w/\sim$ è almeno tanto grande quanto $L_G/\sim$.*

Dimostrazione. Sia $L := L_G$, e consideriamo la mappa $\phi\colon L/\sim \to L_w/\sim$ che manda classi in classi. Dico che ϕ è ben definita e iniettiva.

Infatti, se u è in relazione con v tramite una $\{i,j\}$ adiacenza che passa per w, allora posso supporre che non ci passi, grazie alla debole shellabilità. Inoltre, ogni vertice $\{i,j\}$-terminale in L lo è anche in L_w.

Inoltre, se w ha valenza inferiore di n, allora la sua classe non è un singoletto, e quindi ha senso porre $\phi([w]) = \phi([u])$, con $u \sim w$ diverso da w. Dobbiamo ora esaminare la iniettività.

Se prendiamo due vertici $u, v \in L_w$ in relazione, allora non ci sono problemi se non sono adiacenti a w.

Per quanto riguarda i vertici adiacenti a w, torna comodo denotare con W tale insieme, e con J i colori degli archi connessi a w.

Notiamo che preso un vertice $u \in W$, con $c([w,u]) = e$, allora per ogni altro $j \in J$ u risulta $\{e,j\}$-relazionato, in L_w, al corrispondente $v(j) \in W$.

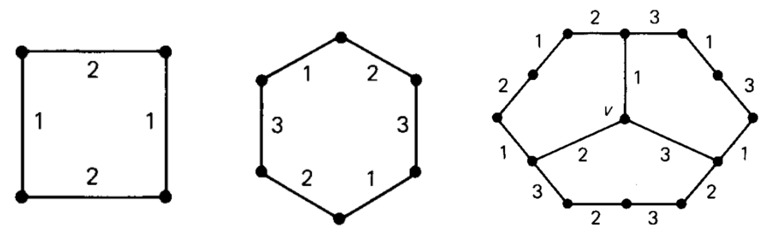
Consideriamo u in $W \cap L$ in relazione con un arbitrario $v \in L$.

Se v appartiene a W, allora vogliamo concludere. Siano c_1 e c_2 i colori mancanti a u e v. Essi mancano anche a w per debole shellibilità (infatti se uno dei due fosse posseduto da w allora potrei creare un residuo bicolorato passante necessariamente per v). Quindi ho concluso: sia u che v sono in relazione con w, e quindi equivalenti tra di loro, in L.

Se v non appartiene a W, allora u e v sono relazionati in L_w con un residuo di tipo $\{c_1, c_2\}$, dove c_2 non è collegato, in L_w a u.
Se c_2 non coincide con $c([w,u])$, allora u e v sono relazionati anche in L.
Se c_2 coincide con $c([w,u])$, allora c_1 non può coincidere con un certo colore collegato a w, in quanto $v \notin W$. Ergo v è $\{c_1, c_2\}$-relazionato a w, che risulta relazionato a u. Quindi u e v sono equivalenti anche in L. $\square$

Per ogni j in J, u è relazionato in L_w a $v(j)$ via $\{c_1, j\}$.

Teorema 3.7. *Se un n-grafo è debolmente shellabile, allora lo è fortemente* con lo stesso shelling.



(a) (b) (c)

Figura 2: Esempio di punti shellabili e non

Dimostrazione. Assumiamo che $(v_1, \ldots, v_N)$ sia uno shelling debole, ma non forte. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $v = v_N$ non è fortemente shellabile da G.

Sia R il residuo contenete v di tipo $I \backslash J$, dove $J = \{c(e) \mid e \text{ incidente in } v\}$. Allora R è debolmente shellabile, e v non è fortemente shellabile in R.

Sia $L := L_R$. Siccome v non è fortemente shellabile in R, L non è vuoto (in particolare $|J| > 1$). Sia $\sim$ l'equivalenza definita precedentemente. Consideriamo, inoltre $L_v := L_{\langle R \backslash v \rangle}$ e la relazione su di esso.

Inoltre, sia U l'insieme dei punti adiacenti a v (in R).

La debole shellabilità implica, come già osservato per il Lemma precedente, che

(1) in R ogni punto di U ha valenza $|J|$;

(2) i punti di U sono una classe di equivalenza completa in L_v.

Quindi L_v ha almeno due distinte classi di equivalenza, date da U, e dalla classe di equivalenza di un punto random $w \notin U$ di R-valenza minore di $|J|$ (che quindi esiste).

Ma adesso abbiamo ottenuto una contraddizione. Infatti, grazie al Lemma precedente, considerando che $\langle R \setminus v \rangle$ è debolmente shellabile, possiamo rimuovere sempre più punti per giungere ad una situazione in cui

(1) $L = L_H$, con $H = \{w\}$;

(2) $L/\sim$ ha almeno due classi di equivalenza. □

Teorema 3.8. *Se $(v_1, \ldots, v_N)$ è lo shelling di un n-grafo regolare, allora $(v_N, \ldots, v_2, v_1)$ è ancora uno shelling*

Dimostrazione. Procediamo su induzione su N. L'affermazione è ovvia per $N = 1, 2$.

Assumiamo che sia vero per $N = 1, \ldots, k-1$, e sia G un k-grafo con shelling $(v_1, \ldots, v_N)$. Dobbiamo dimostrare che per ogni $1 \leq j \leq N$, il vertice v_j appartiene ad un residuo regolare in $G_j := \langle v_j, v_{j+1}, \dots, v_N \rangle$ di rango pari alla G_j-valenza di v_j.

Per assunzione, v_j appartiene ad un residuo regolare dell'opportuno rango, di tipo J, in $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$. Sia R il residuo di tipo $I \setminus J$ in G ($J \neq \varnothing$) contenente v_j. Siccome G è regolare, sappiamo che la valenza di v_j in R è $|J|$, che coincide con la valenza di v_j in $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$. Inoltre sappiamo che il shelling $(v_1, \dots, v_N)$ induce uno shelling su R tramite semplice intersezione.

Per costruzione di J, v_j ha collegamenti con $v_1, \dots, v_{j-1}$ solo via colori in $I \setminus J$, cioè precisamente i complementare dei colori in R. Quindi la valenza di v_j in $\langle v_j, v_{j+1}, \dots, v_N \rangle \cap R$ continua ad essere pari a $|J|$.

Infine, $\langle v_j, v_{j+1}, \dots, v_N \rangle \cap R$ è al più un $k-1$ grafo. Quindi v_j appartiene ad un residuo regolare, in $\langle v_j, v_{j+1}, \dots, v_N \rangle \cap R$ ma quindi anche in G, di tipo $I \setminus J$. Ma siccome G è regolare, e la valenza in $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$ è $|I \setminus J|$, allora la valenza in $\langle v_j, \dots, v_N \rangle$ è $|J|$. □

Lemma 3.9. *Se v è shellabile in G allora $\Delta\langle G \setminus v \rangle$ coincide con $\langle \Delta G \setminus \Delta v \rangle$*

Dimostrazione. Sia δ la bigezione del Teorema 2.8 dall'insieme dei propri residui di G all'insieme dei simplessi chiusi di ΔG. Similmente, sia δ' la bigezione dai residui propri di $\langle G \setminus v \rangle$ ai simplessi chiusi di $\Delta\langle G \setminus v \rangle$. Sappiamo che c'è una iniezione g dall'insieme dei residui di $\langle G \setminus v \rangle$ all'insieme dei residui di G.

Allora la mappa $\delta \circ g \circ (\delta')^{-1}$ induce un isomorfismo da $\Delta\langle G \setminus v \rangle$ a $\langle \Delta G \setminus \Delta v \rangle$. □

Teorema 3.10. *Sia G un n-grafo. È shellabile se e solo se ΔG lo è.*

Dimostrazione. $\boxed{\Rightarrow}$ Supponiamo che $(v_1, \dots, v_N)$ è uno shelling di G. Ogni v_i corrisponde ad una faccetta $s_i = \delta(v_i)$ di ΔG. Vogliamo dimostrare che $(s_1, \dots, s_N)$ è uno shelling di ΔG.

Sia $\Delta_k := \langle s_1, \dots, s_k \rangle$. Sappiamo che corrisponde a ΔG_k, con $G_k := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Dobbiamo dimostrare che un qualunque simplesso s di $s_i \cap s_k \neq \emptyset$ è contenuto in qualche simplesso di codimensione 1 $s_j \cap s_k$.

Sia $R := \delta^{-1}(s)$; allora $v_k, v_i \in V(R)$. Per la shellabilità di G sappiamo che $\langle R \setminus \{v_{k+1}, \dots, v_N\} \rangle$ è connesso. Quindi esiste un $j < k$ tale che $v_j \in V(R)$ e v_j è adiacente a v_k. Per il Teorema 2.8, $\delta(v_j)$ è una faccetta che soddisfa la richiesta.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che ΔG è shellabile, e che $(s_1, \dots, s_N)$ è uno shelling. Sia $v_i := \delta^{-1}(s_i)$ e supponiamo per assurdo che $(v_1, \dots, v_N)$ non è uno shelling di G. Allora esiste un residuo R di rango 2 di G, e un intero m, tale che $\langle R \setminus \{v_{m+1}, \dots, v_N\} \rangle$ è disconnesso (m non può essere 0) . Sia k il minimo dei m.

Sia $s := \delta R$. Sappiamo che esiste una faccetta s_j, con $j < k$, tale che s è contenuta in un simplesso di codimensione 1 $\sigma_j \cap \sigma_k$. Allora $v_j \in V(R)$

e v_j è adiacente a v_k in R. Questo implica che $\langle R \setminus \{v_k, \dots, v_N\}\rangle$ è disconnesso; infatti v_k non costituisce da solo una componente connessa. Abbiamo quindi contraddetto la minimalità di k.

$\square$

4 Gruppi Fondamentali

Un cammino in G è una sequenza di *vertici* adiacenti.

Definizione 4.1. Due cammini $\alpha = \beta\gamma\delta$ e $\alpha' = \beta\gamma'\delta$ con stessi punti iniziali finali sono elementarmente m-omotopici $\alpha \underset{e}{\sim} \alpha'$ se $\gamma(\gamma')^{-1}$ è contenuto in un residuo di rango m.

Definizione 4.2. Due cammini α e α' sono m-omotopici se sono collegati da una sequenza di $\alpha = \alpha_1 \underset{e}{\sim} \dots \underset{e}{\sim} \alpha_k = \alpha'$ tale che α_i hanno tutti gli stessi punti iniziali e finali.

Se $v_0 \in V(G)$ è un punto base fissato, allora possiamo considerare lo standartd m-gruppo fondamentale $\pi(m, G)$. Abbiamo una catena di omomorfismi suriettivi $\pi(0, G) \to \pi(1, G) \to \cdots \to \pi(n, G) = 0$. Il seguente Teorema è provato in [Tit81].

Teorema 4.3. *Se G è un n-grafo, allora $\pi_1(\Delta G) \simeq \pi(n-1, G)$. Inoltre, se ΔG è una varietà, allora coincide anche con $\pi(2, G)$.*

Teorema 4.4. *Se G è un n-grafo shellabile, allora $\pi(2, G) = 0$.*

Dimostrazione. Sia G un qualunque n-grado per cui v è shellabile. Assumeremo che $\pi(2, \langle G \setminus v\rangle) = 0$, per provare che $\pi(2, G) = 0$. Il risultato seguirà poi per induzione.

Per ogni cammino chiuso α puntato su v_0, la shellabilità di v implica che c'è un cammino chiuso α' in $\langle G \setminus v\rangle$ che è elementarmente 2-omotipico a α in G e che non passa per v.

Per assunzione, $\alpha' \sim 0$ in $\langle G \setminus v\rangle$ e quindi lo è in G. $\square$

Teorema 4.5. *Un 3-grafo G è shellabile se e solo se $\pi(2, G) = 0$.*

Dimostrazione. Per un 3-grafo, il complesso ΔG è una pseudovarietà 2-dimensionale con bordo. Se $\pi(2, G) = 0$, allora $\pi_1(\Delta G) \simeq \pi(2, G)$ è banale. Ma allora, ΔG è necessariamente una 2-palla o una 2-sfera. Ma da [Bin64] sappiamo che sono shellabili. $\square$

Osserviamo che se ogni 4-grafo con $\pi(3, G) = 0$ fosse shellabile, allora si avrebbe una congettura facile della Congettura di Poincaré.

Infatti, se $\pi_1(\Delta G) = \pi(3, G) = 0$, allora potremmo sapere che ΔG sarebbe di default shellabile, e quindi una 3-sfera.

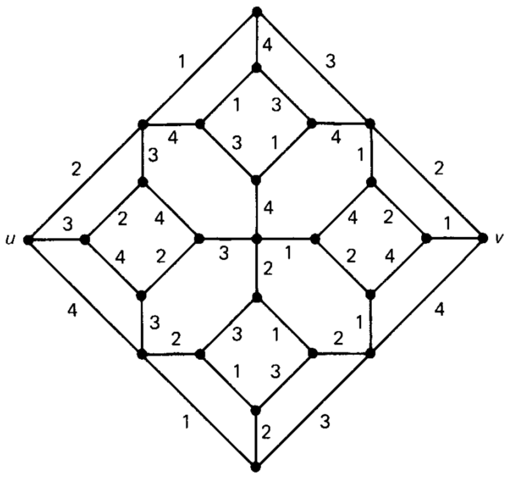


Figura 3: Il 3-grafo H

5 Una 3-sfera non shellabile

Consideriamo in 3-grafo in Figura 3. Costruiamo un 4-grafo G_0 da due copie di H' e H'' in modo che venga un 4-grafo regolare. Possiamo contare i residui a mano: 12 di rango 3; 62 di rango 2; 100 di rango 1; 50 di rango 0. Come conseguenza, ΔG_0 ha 12 vertici, 62 spigoli, 100 facce e 50 tetraedri.

Teorema 5.1. *ΔG_0 non è shellabile.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che G_0 sia shellabile con shelling $(v_1, \dots, v_{50})$, e imponiamo che $v_{50} \in V(H')$. Definiamo quindi $k := \max\{i \mid v_i \in V(H'')\} < 50$.

Il punto $v'' = v_k$ deve aver H''-valenza pari a 3. Infatti, se avesse valenza 4, allora lo stesso $G_k := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ dovrebbe essere un 4-grafo regolare. Tuttavia, siccome esiste almeno un vertice in H' che non sta in G_k, ciò ovviamente non può essere. Infatti, il corrispondete vertice in H'' ha valenza 3, non 4.

Necessariamente, v' è un certo v_j con $j < k$. Infatti, se $j > k$ il vertice v_k ha G_k-valenza 3, in quanto $H'' \subseteq G_k$. Ma analizzando i 4 residui opportuni vediamo subito che per regolarità si devono ottenere entrambe le copie del residuo in H'': una in H'' e una in H' collegate da degli archi verticali.

Abbiamo quindi concluso che in $\langle v_1, \dots v_k \rangle$ v_k ha valenza 4, in quanto vi appartiene tutto H'' e anche v'. Ma siccome $k < 50$, G_k non può essere un 4-grafo regolare. $\square$

Teorema 5.2. *ΔG_0 è topologicamente una 3-sfera.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\pi(2, H) = 0$, ergo è topologicamente un disco o una sfera. Ma siccome H non è regolare, ΔH ha bordo, quindi è un

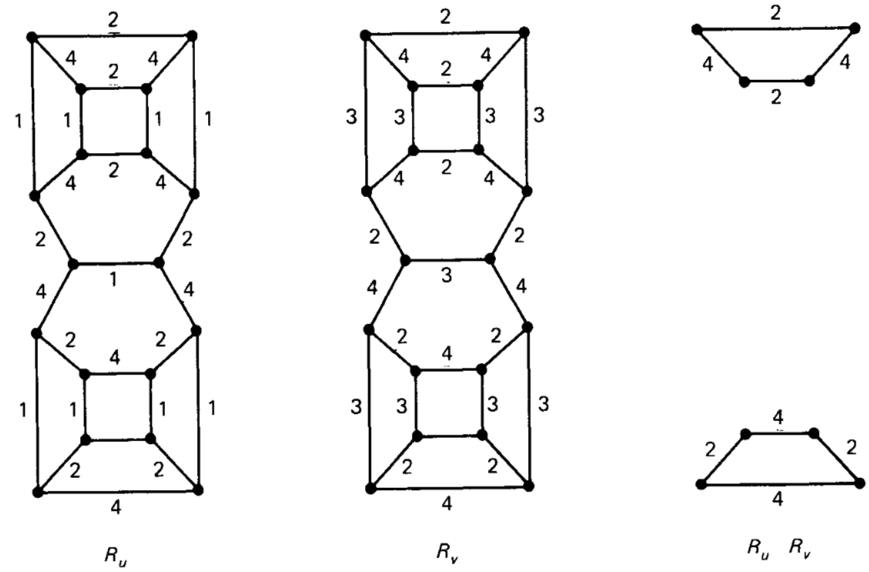


Figura 4: Prova che G_0 è degenere

disco. Inoltre, H' e H'' vengono attaccati sui punti di valenza 3, ergo sui tetraedri di bordo e usando le facce di bordo. Ma attaccando in questo modo due 3-dischi otteniamo precisamente una 3-sfera. □

6 Non Degenericità

G_0 è degenere, cioè l'intersezione di due residui non è sempre vuota o un altro residuo. L'esempio si vede in Figura 4, con R_u il residuo di tipo $\{3\}$ contenente u, e R_v il residuo di tipo $\{1\}$ contenente v in G_0 (i collegamenti tra H' e H'' sono rappresentati dagli archi orizzontali). Ciò implica, come dimostrato in [Vin85], che ΔG_0 è una vera e propria pseudovarietà, che può essere realizzata come un complesso simpliciale astratto.

La congettura di Grünbaum se si possa trovare una 3-sfera non shellabile, ma realizzata via complessi simpliciali astratti, è ancora aperta (nel 1985). Credo si parli di [Grü70].

Riferimenti bibliografici

[Bin64] R. H. Bing. «Topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture». In: *Lectures on Modern Mathematcs, Vol. II.* A cura di T. L. Saaty. 1964.

[BM71] H. Bruggesser e P. Mani. «Shellable decompositions of cells and spheres,» in: *Math. Scand.* 29 (1971), pp. 197–205.

[DK74] G. Danaraj e V. Klee. «Shellings of spheres and polytope». In: *Duke Math.* 41.2 (1974), pp. 443–451.

[Edw75] R. D. Edwards. «The double sospension of a certian honology 3-sphere in S^5». In: *Notices Amer. Math. Soc.* 22.2 (1975), Sommario: A–334.

[Grü70] B. Grünbaum. «Polytopes, Graphs, and Complexes». In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 76.6 (1970), pp. 1131–1201.

[HS62] P. J. Hilton e Wylie S. *Homology Theory.* Cambridge University Press, 1962.

[Moi52] E. Moise. «Affine structures on 3-manifold, V. The triangulation theorem and hauptvermutung». In: *Ann. of Math.* 56.1 (1952), pp. 96–114.

[Rud58] M. E. Rudin. «An unshellable triangulation of a tetrahedron». In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 64.3 (1958), pp. 90–91.

[Tit81] J. Tits. «A local approach to buildings». In: *The Geometric Vein — the Coxeter Festschrift.* A cura di C. Davis, B. Grünbaum e F. Sherk. 1981, pp. 519–547.

[Vin85] A. Vince. «A Non-Shellable 3-Sphere». In: *Europ. J. Combinatorics* 6.1 (1985), pp. 91–100.