Consideriamo la seguente EDP:

$$(P)\quad \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot,-\pi)=u(\cdot,\pi) \\ u_x(\cdot,-\pi)=u_x(\cdot,\pi) \\ u(0,\cdot)=u_0(\cdot) \end{cases} \qquad \text{(equazione del calore)}$$

Cerchiamo una soluzione 2π-periodica in x. Formalmente, scriviamo:

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)e^{inx}$$

$$u_t(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n'(t)e^{inx},\quad u_{xx}(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -n^2 c_n(t)e^{inx}$$

$$u(0,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(0)e^{inx},\quad u_0(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^0 e^{inx}$$

Imponiamo $\begin{cases} c_n'(t)=-n^2c_n(t) \\ c_n(0)=c_n^0 \end{cases}$. È un problema di Cauchy con soluzione $c_n(t)=c_n^0e^{-n^2t}$. Vogliamo dunque

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^0 e^{-n^2t}e^{inx} \quad (\star).$$

Ci serviranno:

Lemma 1: sia R rettangolo chiuso in $\mathbb{R}^d$ e $v_n: R\to\mathbb{R}$ C^k t.c. $\sum \|D^{\underline{h}}v_n\|_\infty<+\infty$ $\forall |\underline{h}|\leq k$. Allora $v=\sum v_n$ è C^k e $D^{\underline{h}}v=\sum D^{\underline{h}}v_n$ $\forall|\underline{h}|\leq k$ ($\underline{h}$ sono i multiindici).

Lemma 2: u C^k in A_i $\forall i\in I$ ($A_i\subset$ dominio u). Allora u è C^k in $\bigcup \mathring{A}_i$.

Teorema (esistenza della soluzione per l'equazione del calore): se u_0 è t.c. $\sum|c_n^0|<+\infty$, $(\star)$ definisce una soluzione a (P) continua in $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, 2π-periodica in x e C^∞ in $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$.
Inoltre, se u_0 é reale anche u è reale.

Dim.: Sia $v_n(t,x)=c_n^0e^{-n^2t}e^{inx}$, $R=[0,+\infty)\times\mathbb{R}$.

$\|v_n\|_{\infty,R}=\sup_{(t,x)\in R}|c_n^0e^{-n^2t}e^{inx}|=|c_n^0|\Rightarrow\sum\|v_n\|_{\infty,R}<+\infty\Rightarrow$
$\Rightarrow$ la serie in $(\star)$ converge totalmente in R, dunque uniformemente.
v_n continue, 2π-periodiche in $x\Rightarrow$ lo stesso vale per u.
Sia $R_\delta=[\delta,+\infty)\times\mathbb{R}$, $\delta>0$.

$$\|D_t^hD_x^kv_n\|_{\infty,R_\delta}=\sup_{(t,x)\in R_\delta}|-n^{2h}(in)^kc_n^0e^{-n^2t}e^{inx}|=|n|^{2h+k}|c_n^0|e^{-n^2\delta}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\sum\|D_t^hD_x^kv_n\|_{\infty,R_\delta}<+\infty$ perche $e^{-n^2\delta}$ batte qualunque polinomio se $\delta>0$. Allora per il lemma 1 u é C^∞ in R_δ $\forall\delta>0$ e, per il lemma 2, lo é in $\bigcup_{\delta>0}\mathring{R}_\delta=\bigcup_{\delta>0}(\delta,+\infty)\times\mathbb{R}=(0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Poiché il lemma 1 ci dice anche che $D_t^hD_x^ku=\sum D_t^hD_x^kv_n$ e dato che le v_n risolvono l'equazione differenziale e quest'ultima è lineare, anche u la risolve. Tutte le derivate di v_n sono 2π-periodiche in x, quindi anche le condizioni di periodicità valgono, inoltre $u(0,x)=u_0(x)$ per definizione ($\sum|c_n^0|<+\infty\Rightarrow u_0$ continua, in particolare è determinata dai c_n^0).
Infine, u_0 reale $\Rightarrow c_{-n}=\overline{c_n}\Rightarrow c_{-n}(t)=\overline{c_n(t)}\Rightarrow u$ reale q.o. $\underset{u \text{ continua}}{\Rightarrow} u$ reale (le implicazioni sono vere per funzioni in L^2). □

Prop. (unicità): sia u_0 continua, u continua su R e C^2 in x, C^1 in t su $\mathring{R}$ 2π-periodica in x che risolve (P) (condizioni minime). Allora u è unica.

Dim.: $\forall t$, $u(t,\cdot)\in L^2$, quindi u è univocamente determinata dai $c_n(t)$.

$$c_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(t,x)e^{-inx}dx \underset{\text{DUTIS}}{\Rightarrow} \quad (u\in C^2\Rightarrow L^1,\ u_t\in C^1\Rightarrow L^1,\ u_{xx}\in C^0\Rightarrow L^1)$$

$$\Rightarrow c_n'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_t(t,x)e^{-inx}dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_{xx}(t,x)e^{-inx}dx=c_n(u_{xx}(t,\cdot))=-n^2c_n(t),$$

$c_n(0)=c_n^0$. Allora i $c_n(t)$ sono univocamente determinati come soluzioni del problema di Cauchy. □

Es.: $\exists u_0$ C^∞ t.c. (P) non ha soluzione in $(-\delta,0]\times\mathbb{R}$ $\forall\delta>0$.
Abbiamo visto che dev'essere $u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n^0e^{-n^2t}e^{inx}$.
Prendendo $c_n^0=e^{-|n|}$ abbiamo u_0 C^∞ ma $|c_n^0e^{-n^2t}|\to+\infty$ $\forall t<0$, assurdo perché coefficienti di Fourier di $u(t,\cdot)$, che è C^2 in x. □

Consideriamo adesso la seguente EDP:

$$(P')\quad\begin{cases} u_{tt}=v^2u_{xx} \\ u(\cdot,-\pi)=u(\cdot,\pi) \\ u_x(\cdot,-\pi)=u_x(\cdot,\pi) \\ u(0,\cdot)=u_0(\cdot) \\ u_t(0,\cdot)=u_1(\cdot)\end{cases}\qquad\text{(equazione delle onde}$$

Procediamo alla risoluzione formale:

$$u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(t)e^{inx},\quad u_t(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n'(t)e^{inx}$$

$$u_{tt}(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n''(t)e^{inx},\quad u_{xx}(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}-n^2c_n(t)e^{inx}$$

$$\begin{cases} c_n''(t)=-v^2n^2c_n(t) \\ c_n(0)=c_n^0 \\ c_n'(0)=c_n^1\end{cases}\qquad \begin{aligned} &c_n(t)=a_ne^{ivnt}+b_ne^{-ivnt},\\ &a_n+b_n=c_n^0,\\ &a_nivn-b_nivn=c_n^1,\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{c_n^0}{2}+\frac{c_n^1}{2ivn},\quad b_n=\frac{c_n^0}{2}-\frac{c_n^1}{2ivn}\quad\left(c_0(t)=c_0^0+c_0^1t\right).$$

$$u(t,x)=c_0^0+c_0^1t+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_ne^{in(x+vt)}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_ne^{in(x-vt)}\quad(\star\star)$$

$$=c_0^0+c_0^1t+\varphi^+(x+vt)+\varphi^-(x-vt)\quad(\star\star\star)$$

Teorema (esistenza): dati $u_0\in C^2_{per}$, $u_1\in C^1_{per}$, $\exists$ $c_0^0,c_0^1\in\mathbb{C}$ e $\varphi^+,\varphi^-\in C^2_{per}$ (con integrale nullo sul periodo) t.c. $(\star\star\star)$ risolve (P').
Inoltre, u_0,u_1 reali $\Rightarrow c_0^0,c_0^1\in\mathbb{R}$ e φ^+,φ^- reali.

Dim.: $u_{tt}(t,x)=v^2[(\varphi^+)''(x+vt)+(\varphi^-)''(x-vt)]=v^2u_{xx}(t,x)$.
φ^+,φ^- 2π-per. $\Rightarrow$ anche le derivate $\Rightarrow$ le condizioni di periodicità sono soddisfatte.
Al bordo: $\begin{cases} c_0^0+\varphi^++\varphi^-=u_0 \\ c_0^1+v(\varphi^+-\varphi^-)'=u_1\end{cases}$. $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^+=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi^-=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow c_0^0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_0.\quad \varphi^\pm\ C^1\ 2\pi\text{-per.}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\varphi^\pm)'\ C^0\ 2\pi\text{-per e }\int_{-\pi}^{\pi}(\varphi^\pm)'=\varphi^\pm(\pi)-\varphi^\pm(-\pi)=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow c_0^1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_1$. u_1 C^1 2π-per. $\Rightarrow$ $\underbrace{u_1-c_0^1}_{\text{ha integrale nullo sul periodo}}$ ammette una primitiva g C^2 2π-periodica e t.c. $\int_{-\pi}^{\pi}g=0$.
Allora $\varphi^+=\dfrac{u_0-c_0^0+g/v}{2}$, $\varphi^-=\dfrac{u_0-c_0^0-g/v}{2}$.
Inoltre, se u_0 e u_1 sono reali allora $c_0^0,c_0^1\in\mathbb{R}$ e φ^+,φ^- sono reali per costruzione. □

Teorema (esistenza, seconda versione): se $\sum|n|^2|c_n^0|,\sum|n||c_n^1|<+\infty$, $(\star\star)$ risolve (P'). u_0,u_1 reali $\Rightarrow u$ reale.

Dim.: è analoga a quella vista per l'equazione del calore, ma stavolta, con le ipotesi date, u è solo C^2; tuttavia, è definita in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. □

Prop.: c'è unicità con le condizioni minime di regolarità.

Dim.: è analoga a quella per l'equazione del calore. □

Operatori

$$T: C^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})\to C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$$
$$u\longmapsto -\ddot{u}$$

Quand'è che T é autoaggiunto?

$$\langle Tu;v\rangle=\langle-\ddot{u};\bar{v}\rangle=-\int_{-\pi}^{\pi}\ddot{u}\bar{v}=-[\dot{u}\bar{v}]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\dot{u}\dot{\bar{v}}$$

$$\langle u;Tv\rangle=\langle u;-\ddot{v}\rangle=-\int_{-\pi}^{\pi}u\ddot{\bar{v}}=-[u\dot{\bar{v}}]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\dot{u}\dot{\bar{v}}$$

Ad esempio, se restringiamo T alle funzioni che valgono 0 agli estremi, è autoaggiunto e definito positivo. In generale, non è nemmeno autoaggiunto.
Se ci restringiamo alle u t.c. $u(-\pi)=u(\pi)$, $\dot{u}(-\pi)=\dot{u}(\pi)$, é autoaggiunto, è semidefinito positivo (ma non definito: le costanti) e ha una base di autovettori: e^{inx}, $n\in\mathbb{Z}$.
Sia invece

$$T: L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})\to L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$$
$$u\longmapsto gu$$

dove $g>0$, e iniettiva. T è ovviamente autoaggiunto e definito positivo, ma non ha autovalori.

Disuguaglianza isoperimetrica nel piano: sia $D\subset\mathbb{R}^2$ compatto con bordo C^1, $A=|D|$, $L=$ lunghezza di ∂D. Allora $L^2\geqslant4\pi A$ e vale l'uguale se e solo se D è un disco.

Dim.: ci si può ridurre al caso in cui ∂D é parametrizzato da un'unica curva C^1. La prendiamo $\gamma:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}$ a velocità costante $|\dot{\gamma}|=\frac{L}{2\pi}$ che percorre ∂D in senso antiorario. $L^2=2\pi\|\dot{\gamma}\|_2^2$.

$$\langle\dot{\gamma};\gamma\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\dot{\gamma}(t)\overline{\gamma(t)}dt=\int_\gamma(dx+idy)(x-iy)=\int_\gamma(x-iy)dx+(y+ix)dx=$$

$$\underset{\text{Gauss-Green}}{=}\int_D2i\,dxdy=2iA.$$

$$L^2=2\pi\|\dot{\gamma}\|_2^2\underset{\text{Parseval}}{=}4\pi^2\sum|c_n(\dot{\gamma})|^2=4\pi^2\sum|n|^2|c_n(\gamma)|^2\geqslant$$

$$\geqslant4\pi^2\sum n|c_n(\gamma)|^2=4\pi^2\sum nc_n(\gamma)\overline{c_n(\gamma)}=4\pi^2\sum c_n(-i\dot{\gamma})\overline{c_n(\gamma)}=$$

$$\underset{\text{Parseval}}{=}2\pi\langle-i\dot{\gamma};\gamma\rangle=4\pi A.\ \text{C'è l'uguale}\Leftrightarrow|c_n(\gamma)|=0\ \forall n\neq0,1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\gamma(t)=c_0+c_1e^{it}\Rightarrow D\text{ disco. □}$$

Esempio di EDP senza unicità:

$$\begin{cases}u_t=u_{xx}\\ u(\cdot,-\pi)=u(\cdot,\pi)\\ u(0,\cdot)=u_0(\cdot)\end{cases}$$

con le condizioni di Dirichet, $u_x(\cdot,\pm\pi)=0$. Con quelle di periodicità, ritroviamo l'equazione del calore $\Rightarrow u(t,x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n^0e^{-n^2t}e^{inx}\Rightarrow$

$\Rightarrow u(t,\pm\pi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n^0(-1)^ne^{-n^2t}$, che definisce una funzione analitica in e^{-t}, quindi in generale non é nulla.

Esempio di EDP senza esistenza (né nel passato, né nel futuro):

$$\begin{cases}u_{ttt}=-8u_{xx}\\ u(\cdot,-\pi)=u(\cdot,\pi)\\ u_x(\cdot,-\pi)=u_x(\cdot,\pi)\\ u(0,\cdot)=u_0(\cdot),\ u_t(0,\cdot)=u_{tt}(0,\cdot)=0\end{cases}$$

L'equazione per $c_n(t)$ è

$$\begin{cases}c_n'''(t)=8n^2c_n(t)\\ c_n(0)=c_n^0,\ c_n'(0)=c_n''(0)=0\end{cases}$$

$$c_n(t)=\frac{c_n^0}{3}e^{2|n|^{2/3}t}+\frac{2c_n^0}{3}e^{-|n|^{2/3}t}\cos(\sqrt{3}|n|^{2/3}t)$$

È facile vedere che $|c_n(t)|\to+\infty$ tranne per una quantità numerabile di t, quindi non può esistere una soluzione.