Ω aperto di $\mathbb{R}^d$, u di classe C^2 su Ω.

$$\Delta u := \operatorname{tr}(\nabla^2 u) = \operatorname{div}(\nabla u) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Diciamo che u è armonica in Ω se $\Delta u = 0$.

MP_x: u ha la proprietà della media sulle palle centrate in x se $\forall r$ t.c. u è definita in $B(x,r)$ vale

$$\fint_{B(x,r)} u \, d\mathcal{L}^d = u(x).$$

MS_x: u ha la proprietà della media sulle sfere centrate in x se $\forall r$ t.c. u è definita in $B(x,r)$ vale

$$\fint_{\partial B(x,r)} u \, d\sigma_{d-1} = u(x).$$

Prop.: u continua in Ω. $MS_{\bar{x}} \Leftrightarrow MP_{\bar{x}}$.

Dim.: $\bar{x} \in \Omega$, r t.c. $\overline{B(\bar{x},r)} \subset \Omega$.

$(\Rightarrow)$ $$\int_{B(\bar{x},r)} u(x)dx = \int_0^r \left(\int_{\partial B(\bar{x},\rho)} u(x)\, d\sigma_{d-1}(x) \right) d\rho \underset{MS_{\bar{x}}}{=} \int_0^{\rho} c_{d-1} \rho^{d-1} u(\bar{x})\, d\rho = \alpha_d r^d u(\bar{x}).$$

$(\Leftarrow)$ $$\underbrace{\int_{B(\bar{x},r)} u(x)dx}_{= \alpha_d r^d u(\bar{x})} = \int_0^r \underbrace{\left(\int_{\partial B(\bar{x},\rho)} u(x)\, d\sigma_{d-1}(x) \right)}_{h(\rho)} d\rho$$

Conv. dom. $\Longrightarrow$ h è continua in $[0,r]$ (per la precisione, lo è in $[0,R)$, $R = \operatorname{dist}(\bar{x}, \Omega^c)$):

$$h(\rho) = \rho^{d-1} \int_{S^{d-1}} u(\bar{x} + \rho z)\, d\sigma_{d-1}(z).$$

TFCI $\Rightarrow h(\rho) = c_{d-1} \rho^{d-1} u(\bar{x})$. $\square$

Lemma 1: u $C^2 \Rightarrow g$ derivabile, con formula.

$$g(r) := \fint_{B(\bar{x},r)} u(x)\, d\sigma_{d-1}(x) = \frac{1}{c_d} \int_{S^{d-1}} u(\bar{x} + rz)\, d\sigma_{d-1}(z).$$

Dim.: DUTIS $\Rightarrow$ $$g'(r) = \frac{1}{c_d} \int_{S^{d-1}} \nabla u(\bar{x} + rz) \cdot \underset{= \nu(z)}{z}\, d\sigma_{d-1}(z) \underset{\text{teorema della div}}{=} \frac{1}{c_d} \int_{D^d} \operatorname{div}_z(\nabla u(\bar{x}+rz))\, dz = \frac{1}{c_d} \int_{D^d} r \Delta u(\bar{x} + rz)\, dz = \frac{1}{c_d r^{d-1}} \int_{B(\bar{x},r)} \Delta u \, d\mathcal{L}^d. \quad \square$$

Lemma 2: $\fint_{B(\bar{x},r)} u \, d\mathcal{L}^d$, $\fint_{\partial B(\bar{x},r)} u \, d\sigma_{d-1} \xrightarrow[r \to 0]{} u(\bar{x})$ se u è continua.

Teo.: u armonica $\Rightarrow$ proprietà della media.

Dim.: lemma 1 + $\Delta u = 0 \Rightarrow g$ costante. Lemma 2 $\Rightarrow g(r) \xrightarrow{r \to 0} u(\bar{x})$. $\square$

Teo.: u continua con proprietà della media $\Rightarrow u$ C^∞ e armonica.

Dim.: C^∞. Caso u limitata e $\Omega = \mathbb{R}^d$. Sia φ C^∞, $\operatorname{supp}(\varphi)$ cpt, radiale $(\varphi(x) = \tilde{\varphi}(|x|))$ e t.c. $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = \int_0^{+\infty} c_d r^{d-1} \tilde{\varphi}(r)\, dr = 1$. Allora $u * \varphi$ è ben definita e C^∞.

$$u * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\varphi(y)\, dy \underset{y=-z}{=} \int_{\mathbb{R}^d} u(x+z) \tilde{\varphi}(|z|)\, dz = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(0,r)} u(x+z) \tilde{\varphi}(r)\, d\sigma_{d-1}(z) \right) dr \overset{\text{proprietà della media}}{=} \int_0^{+\infty} u(x) \tilde{\varphi}(r) c_d r^{d-1}\, dr = u(x).$$

Caso u e Ω qualunque: sia $A \subset\subset \Omega$ e $\delta > 0$ t.c. $A + B(0,2\delta) \subset \Omega$. Sia $\tilde{u} = u \cdot \mathbb{1}_{\overline{A + B(0,\delta)}}$ e φ come sopra con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(0,\delta)$. Allora, ripetendo i passaggi, $\tilde{u} * \varphi$ è C^∞ e coincide con u su A.

$\Delta u = 0$: proprietà della media $\Rightarrow g(r) \equiv u(\bar{x})$ costante $\Rightarrow g'(r) = 0$, ma lemma 1+lemma 2 $\Rightarrow g'(r) \cdot \frac{d}{r} \xrightarrow{r \to 0} \Delta u(\bar{x}) \Rightarrow \Delta u(\bar{x}) = 0$ $(\forall x \in \Omega)$. $\square$

Principio del massimo, prima versione: se u armonica su Ω aperto connesso ammette massimo, u è costante.

Dim.: sia $M = \max u$, $E = u^{-1}(M)$ è chiuso e, per ipotesi, non vuoto. Sia $\bar{x} \in E$, $r > 0$ t.c. $B(\bar{x},r) \subset \Omega$. $M = u(\bar{x}) = \fint_{B(\bar{x},r)} u(x)dx \leq M$ e, poiché u è continua, vale l'uguale $\Rightarrow u(x) = M$ $\forall x \in B(\bar{x},r)$ $\Rightarrow E$ aperto. $\square$

Principio del massimo, seconda versione: u armonica su Ω aperto limitato e continua in $\bar{\Omega}$. (i) u ammette massimo su $\partial\Omega$
(ii) se ha massimo in Ω, è costante sulla componente connessa

Dim.: (ii) segue dalla prima versione.

(i) Ω limitato $\Rightarrow \bar{\Omega}$ cpt $\Rightarrow u$ ha max in $\bar{\Omega}$. Se il massimo è in $\partial\Omega$ fine, altrimenti sia A la cc e, per (ii) u è costante in $A \Rightarrow$ ha max in ∂A, ma $\emptyset \neq \partial A \subset \partial\Omega$ (fatti topologici). $\square$

Serve Ω lim.. Es.: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, $u(x,y) = x$.

Unicità per l'equazione di Poisson: Ω aperto limitato, f continua in $\bar{\Omega}$ e u_0 continua in $\partial\Omega$. Il problema (P) $\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ ha al più una soluzione.

Dim.: siano u_1, u_2 due soluzioni. Allora $u = u_1 - u_2$ è armonica su Ω e 0 al bordo. Siccome max e min sono al bordo, $u = 0$. $\square$

Principio del confronto: Ω e f come sopra, u_1 e u_2 t.c. $\Delta u_i = f$ in Ω. Se $u_1 \geq u_2$ su $\partial\Omega$, $u_1 \geq u_2$ su Ω.

Dim.: $u = u_1 - u_2$. u è armonica e $u \geq 0$ su $\partial\Omega$. Poiché il minimo è su $\partial\Omega$, $u \geq 0$ su Ω. $\square$

Prop.: $f: \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa o antiolomorfa $\Rightarrow f$ armonica.

Dim.: $$\frac{\partial f}{\partial y} = \pm i \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \pm i \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \pm i \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \pm i \frac{\partial}{\partial x}\left(\pm i \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \quad \square$$

Prop.: Ω aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2 (\cong \mathbb{C})$, $u: \Omega \to \mathbb{R}$ armonica $\Rightarrow \exists f$ olomorfa su Ω t.c. $u = \operatorname{Re}(f)$.

Dim.: se esiste f, $\operatorname{Re}(f') = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\operatorname{Im}(f') = \operatorname{Im}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \operatorname{Re}\left(-i \frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Poniamo dunque $g := \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$. g è olomorfa:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - i \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \underset{u \text{ armonica}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = i \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Ω semplicemente connesso $\Rightarrow \exists f$ primitiva, la scelgo t.c. $f(z_0) = u(z_0)$ per $z_0 \in \Omega$ fissato.

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \operatorname{Re}(f') = \operatorname{Re}(g) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\operatorname{Im}(f') = -\operatorname{Im}(g) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$\nabla \operatorname{Re}(f) = \nabla u$. $\square$

Q forma quadratica definita positiva, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid Q(x) \leq 1\}$, $P_n = \{$polinomi su $\mathbb{R}^d$ di grado $\leq n\}$, $g \in P_n$, $u_0 \in P_{n+2}$.

(P) $\begin{cases} \Delta u = g & \text{su } \Omega \\ u = u_0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$ ha una soluzione $u \in P_{n+2}$.

Dim.: sia $$T: P_n \to P_n, \quad v \mapsto \Delta(v \cdot (Q-1)).$$ Se $\exists v$ t.c. $Tv = g - \Delta u_0$, $u = v \cdot (Q-1) + u_0$ è la soluzione cercata.

Serve T suriettiva $\underset{\text{dim finita}}{\Longleftrightarrow}$ T iniettiva. $Tv = 0$. Sia $w = v \cdot (Q-1)$. $Tv = 0 \Rightarrow \Delta w = 0$, inoltre $w = 0$ su $\partial\Omega$. Per unicità, $w = 0 \Rightarrow v = 0$ su Ω ($Q - 1 = 0$ solo su $\partial\Omega$). $\square$

$D = \{x \in \mathbb{R}^2 (\cong \mathbb{C}) \mid |x| < 1\}$. (P) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } D \\ u = u_0 & \text{su } \partial D \end{cases}$.

Formalmente: $g(t) = u_0(e^{it}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ (SdF).

$$u(z) = -c_0 + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n}_{f_1(z)} + \overline{\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{c_{-n}}\, z^n}_{f_2(z)} \right)}.$$

Se u_0 è t.c. $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| < +\infty$, $f_1(z)$, $f_2(z)$ sono definite da serie che convergono totalmente in $\bar{D} \Rightarrow$ continue, inoltre hanno raggio di convergenza $\geq 1 \Rightarrow$ olomorfe su $D \Rightarrow u$ armonica (e $u = u_0$ su ∂D).

Ricaviamoci un'altra formula, per cui è sufficiente u_0 continua, senza dimostrare che effettivamente funziona. Formalmente:

$$u(z) = -c_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} \bar{z}^n =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(e^{it})\, dt + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(e^{it}) (e^{-it} z)^n\, dt + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(e^{it}) \overline{(e^{-it} z)}^n =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(e^{it}) \left(-1 + \frac{1}{1 - e^{-it} z} + \frac{1}{1 - e^{it} \bar{z}} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(e^{it})\, h(t,z)\, dt,$$ dove h è il nucleo di Poisson.

$$h(t,z) = \operatorname{Re}\left(-1 + \frac{2}{1 - e^{-it} z} \right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 + e^{-it} z}{1 - e^{-it} z} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(1 + e^{-it} z)(1 - e^{it} \bar{z}) + (1 + e^{it} \bar{z})(1 - e^{-it} z)}{|1 - e^{-it} z|^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2(1 - |z|^2)}{|e^{it} - z|^2} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2}.$$