Sia V uno s.v. reale con prodotto scalare definito positivo, $e_1, \dots, e_k$ una base ortonormale di V e $\varphi: \mathbb{R}^k \to V$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 e_1 + \dots + x_k e_k$. Diciamo che $E \subset V$ è misurabile se $\varphi^{-1}(E)$ è misurabile secondo Lebesgue e poniamo $\sigma_k(E) = |\varphi^{-1}(E)|$. Osserviamo che non dipende dalla scelta della base: $\tilde{\varphi}^{-1}(E) = (\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})^{-1} \circ \varphi^{-1}(E)$ e $\psi = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ è una matrice ortornormale (cambio di base da $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k$ a $e_1, \dots, e_k$) $\Rightarrow |\det \psi| = 1$.

Sia $\Lambda: V \to V'$ un'applicazione lineare tra spazi come sopra di $\dim = k$. Definiamo $|\det \Lambda| = |\det M|$ dove M è la matrice associata a Λ dalla scelta di due basi per V e V'. $\det M$ dipende dalla scelta, $|\det M|$ no. Osserviamo che, per definizione, $\sigma_k(\Lambda(E)) = |\det \Lambda| \sigma_k(E)$.

Siano V, W come sopra di dim k e d, $\Lambda: V \to W$ lineare.

$$|\det \Lambda| = \begin{cases} 0 \text{ se } \dim(\Lambda(V)) < k \\ \text{come sopra (con } V' = \Lambda(V)) \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Prop.: sia $\Lambda: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ lineare, N matrice $d \times k$ associata.

$$|\det \Lambda|^2 = \det(N^T N) = \sum_{\substack{\text{minori} \\ k \times k \text{ di } N}} \det(Q)^2 .$$

Dim.: la formula con i minori seguirà da una che vedremo dopo. Facciamo solo il caso $rk(\Lambda) = k$. Sia $e_1, \dots, e_k$ una base ortonormale di $\mathcal{Im}(\Lambda)$, M la matrice $k \times k$ associata a $\Lambda: \mathbb{R}^k \to \mathcal{Im}(\Lambda)$ con $e_1, \dots, e_k$ in arrivo e la base canonica in partenza, B la matrice $d \times k$ che ha come colonne i vettori e_i nella base canonica di $\mathbb{R}^d$. Allora $N = BM$ e

$$\det(N^T N) = \det(M^T \underbrace{B^T B}_{= Id_{k \times k}} M) = \det(M)^2 = |\det(\Lambda)|^2 . \ \square$$

Prop.: sia Σ una superficie di $\dim = k$. $\exists!$ misura σ_k su Σ t.c. $\forall \varphi: D \to \Sigma \cap U$ parametrizzazione si ha

$$\sigma_k(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)} J\varphi(s) ds \quad \forall E \subset \Sigma \cap U \text{ t.c. } E \text{ è misurabile}$$
(cioè se $\varphi^{-1}(E)$ è mis. $\forall \varphi$),

dove $J\varphi(s) = |\det d_s \varphi| \underset{\substack{\text{dalla prop.} \\ \text{precedente}}}{=} \sqrt{\det(\nabla^T \varphi(s) \nabla \varphi(s))}$.

Dim. (traccia): siano $\varphi_i: D_i \to \Sigma \cap U_i$ t.c. $\bigcup (\Sigma \cap U_i) = \Sigma$ e $\Sigma_i \subset \Sigma \cap U_i$ disgiunti t.c. $\bigcup \Sigma_i = \Sigma$. Poniamo

$$\sigma_k(E) = \sum_i \int_{\varphi_i^{-1}(E \cap \Sigma_i)} J\varphi_i(s) ds$$

C'è da verificare che sia ben posta: date $\varphi: D \to \Sigma \cap U$, $\tilde{\varphi}: \tilde{D} \to \Sigma \cap \tilde{U}$, sia $E \subset \Sigma \cap U \cap \tilde{U}$ mis..

$$\int_{\varphi^{-1}(E)} J\varphi(s) ds \underset{\substack{\text{cambio} \\ \text{di variabile } s = \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}(t)}}{=} \int_{(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})^{-1} \circ \varphi^{-1}(E)} |\det d_t(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})| J\varphi(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}(t)) dt$$

$$|\det d_t(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})| = |\det d_{\tilde{\varphi}(t)} \varphi^{-1} d_t \tilde{\varphi}| =$$
$$= |\det d_{\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}(t)} \varphi|^{-1} |\det d_t \tilde{\varphi}| = (J\varphi(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}(t)))^{-1} J\tilde{\varphi}(t) \text{ e}$$
$$(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})^{-1} \circ \varphi^{-1}(E) = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}(E) = \tilde{\varphi}^{-1}(E) \Rightarrow \text{tesi. } \square$$

Def.: sia V s.v. di $\dim = d$. $\alpha: V^k \to \mathbb{R}$ è un k-covettore se è multilineare alternante. Indichiamo con $\Lambda^k(V)$ i k-covettori.

Def.: dati $\alpha_1 \in \Lambda^{k_1}(V)$, $\alpha_2 \in \Lambda^{k_2}(V)$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \Lambda^{k_1 + k_2}(V)$ è

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2(v_1, \dots, v_{k_1+k_2}) = \frac{1}{k_1! k_2!} \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} sgn(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_1)}) \alpha_2(v_{\sigma(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma(k_1+k_2)}).$$

(prodotto esterno)

Ha un po' di proprietà che non verificheremo.

Sia V di $\dim = d$, e_i una base, e_i^* gli 1-covettori t.c. $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Dato $\underline{i} \in I(d, k)$ (k-multiindici in $\{1, \dots, d\}$), sia $e_{\underline{i}} = (e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ e $e_{\underline{i}}^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$. $e_{\underline{i}}^*(e_{\underline{j}}) = \delta_{\underline{i}\underline{j}}$. Se α è t.c. $\alpha(e_{\underline{i}}) = 0 \ \forall \underline{i}$, per multilinearità e alternanza $\alpha = 0$. Questi fatti possono essere messi insieme per enunciare il seguente:

Teorema: $e_{\underline{i}}^*$ è una base di $\Lambda^k(V)$.

Dim.: dato $\alpha \in \Lambda^k(V)$, sia $\tilde{\alpha} = \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{\underline{i}}) e_{\underline{i}}^*$. È facile verificare che $(\tilde{\alpha} - \alpha)(e_{\underline{i}}) = 0 \ \forall \underline{i} \Rightarrow \tilde{\alpha} - \alpha = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha$. Inoltre, se $\alpha = \sum_{\underline{i}} \alpha_{\underline{i}} e_{\underline{i}}^* = 0$, allora $0 = \alpha(e_{\underline{i}}) = \alpha_{\underline{i}} \ \forall \underline{i}$. $\square$

Prop.: V come sopra, $v_1, \dots, v_k \in V$, $A_{ij} = e_i^*(v_j)$.
$e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k) = \det(A_{\underline{i}})$ dove $A_{\underline{i}}$ è il minore $k \times k$ di A formato dalle righe $i_1, \dots, i_k$.

Dim.: $e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k) = e_{i_1}^* \wedge e_{\underline{i}'}^*(v_1, \dots, v_k)$, $\underline{i}' = (i_2, \dots, i_k)$. Applicando la def. del prodotto esterno, esce lo sviluppo di $\det(A_{\underline{i}})$ rispetto alla prima riga. $\square$

Prop.: sia V di $\dim = k$, $e_1, \dots, e_k$ base ortonormale. $\forall v_1, \dots, v_k \in V$, $\alpha \in \Lambda^k(V)$, $\alpha(v_1, \dots, v_k) = \alpha(e_1, \dots, e_k) \det(A) = \pm \sigma_k(R(v_1, \dots, v_k))$ dove $A_{ij} = e_i^*(v_j)$ e $R(v_1, \dots, v_k)$ è il rettangolo generato.

Dim.: $\alpha = \sum_{\underline{i}} \alpha(e_{\underline{i}}) e_{\underline{i}}^* \underset{d=k}{=} \alpha(e_1, \dots, e_k) e_{\underline{i}}^*$, $\underline{i} = (1, \dots, k)$.

La prima uguaglianza segue dalla prop. sopra. Per la seconda, sia $\varphi: \mathbb{R}^k \to V$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$, allora $R = R(v_1, \dots, v_k) = \varphi([0,1]^d)$ e

$\sigma_k(R) = |\det \varphi| = |\det A|$. $\square$

Formula di Binet generalizzata: date A, B matrici $d \times k$,

$$\det(B^T A) = \sum_{\underline{i}} \det(B_{\underline{i}}) \det(A_{\underline{i}}).$$

Dim.: dati $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^d$, sia $\alpha(v_1, \dots, v_k) = \det(B^T A)$ dove B è fissato e $A_{ij} = e_i^*(v_j)$ (e_i base canonica). Allora $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^d)$, perciò

$$\det(B^T A) = \alpha(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\underline{i}} \underbrace{\alpha(e_{\underline{i}})}_{= \det(B_{\underline{i}}^T)} \underbrace{e_{\underline{i}}^*(v_1, \dots, v_k)}_{= \det(A_{\underline{i}})} . \ \square$$

per def. di α

prop. sopra