Def.: data $f \in L^1([-\pi,\pi];\mathbb{C})$, sono ben definiti
$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx .$$

Vogliamo scrivere $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx}$. L^2 è uno spazio di Hilbert, quindi ci immaginiamo che lì valga qualcosa del genere.

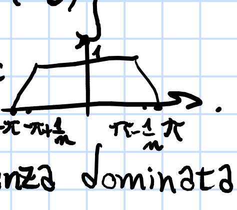
Teorema (Stone-Weierstrass complesso): sia K cpt T2, $C(K;\mathbb{C})$ le funzioni continue da K in $\mathbb{C}$ dotato della topologia della norma del sup, $A \subset C(K;\mathbb{C})$ una sotto-algebra che separa i punti e contenente le costanti. Allora $\overline{A}^{C(K;\mathbb{C})} = C(K;\mathbb{C})$. Se A non separa, basta quozientare.

Teorema: $\mathcal{F} = \left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ sono una base di Hilbert di $L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})$.

Dim.: $\left\langle \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} ; \frac{e^{imx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}\,dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n=m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$\mathrm{Span}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}, a_n = 0 \text{ tranne al più per finiti } n \right\} =$
$=$ i polinomi trigonometrici. Sono una sotto-algebra di $C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$ che contiene le costanti (a_0) e separa tutti i punti tranne, ovviamente, $-\pi$ e π (e^{ix}). Allora

$$\overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}^{C([-\pi,\pi];\mathbb{C})} = \{ g \in C([-\pi,\pi];\mathbb{C}) \mid g(-\pi) = g(\pi) \}$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}^{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} \supseteq \{ g \in C([-\pi,\pi];\mathbb{C}) \mid g(-\pi) = g(\pi) \}$$

$\Downarrow \to \forall g \in C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$, $g_n = g\cdot\varphi_n$, $\varphi_n =$ .
$g_n \in C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$, $g_n(-\pi) = g_n(\pi) = 0$, $|g_n| \leq g \Rightarrow$
$\Rightarrow g_n \to g$ in L^2 per convergenza dominata

$$\overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}^{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} \supseteq C([-\pi,\pi];\mathbb{C})$$
$\Downarrow \to$ le continue sono dense in L^2
$$\overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}^{L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C})} = L^2([-\pi,\pi];\mathbb{C}) \quad \square$$

Dalla teoria degli spazi di Hilbert seguono un po' di risultati per le funzioni in L^2 che daremo per buoni. Notiamo solo che
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{inx} = f(x)$$ dove la convergenza è incondizionata in L^2. A meno di sottosuccessioni,
$$\sum_{n=-N_k}^{N_k} c_n(f) e^{inx} \to f(x) \quad \text{q.o.}$$

Un teorema avanzato (Carleson) dice che non serve passare a sottosuccessioni.

Prop.: $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ C^1 t.c. $f(-\pi)=f(\pi)$. $c_n(f') = in\, c_n(f)$.

Dim.: $c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx}\,dx \underset{\text{per parti}}{=} \frac{1}{2\pi}\left(\cancel{\left[f(x) e^{-inx} \right]_{-\pi}^{\pi}} + in\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx \right) =$
$= in\, c_n(f)$. $\square$

Prop.: $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ C^1 t.c. $f(-\pi)=f(\pi)$. (i) $\sum |n|^2 |c_n(f)|^2 = \frac{\|f'\|^2}{2\pi} < +\infty$
(ii) $\sum |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty \quad \forall \alpha < \frac{1}{2}$.

Dim.: (i) $\sum |n|^2 |c_n(f)|^2 = \sum |c_n(f')|^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \frac{\|f'\|^2}{2\pi} < +\infty$.

(ii) $\sum |n|^\alpha |c_n(f)| = \sum |n\, c_n(f)| \frac{1}{|n|^{1-\alpha}} \underset{\text{CS}}{\leq} \Big(\underbrace{\sum |n|^2 |c_n(f)|^2}_{<+\infty \text{ per (i)}} \Big)^{1/2} \Big(\underbrace{\sum \frac{1}{|n|^{2-2\alpha}}}_{<+\infty} \Big)^{1/2}$

$<+\infty \Leftrightarrow 2-2\alpha > 1$, cioè $\alpha < \frac{1}{2}$. $\square$

Ne segue che, con queste ipotesi, la SdF di f converge totalmente.

Prop.: $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ C^k t.c. $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$ $\forall h = 0,1,\dots,k-1$.
(i) $\sum |n|^{2k} |c_n(f)|^2 < +\infty$
(ii) $\sum |n|^\alpha |c_n(f)| < +\infty \quad \forall \alpha < k - \frac{1}{2}$

Dim.: per induzione, usando che $|n|^{2k}|c_n(f)|^2 = |n|^{2(k-1)}|c_n(f')|^2$ e $|n|^\alpha |c_n(f)| = |n|^{\alpha-1}|c_n(f')|$. $\square$

Prop.: $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ t.c. $\sum |n|^k |c_n(f)| < +\infty$. Allora f è C^k e $D^h f(-\pi) = D^h f(\pi)$ $\forall h = 0,1,\dots,k$. $\square$

Dim.: la SdF di f converge totalmente con tutte le derivate fino all'ordine k. $\square$

Lemma (Riemann-Lebesgue): $g \in L^1(\mathbb{R})$, $h \in L^\infty(\mathbb{R})$ T-periodica.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(yx)\,dx \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} \Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx}_{m} \Big) \Big(\underbrace{⨍_0^T h(x)\,dx}_{a} \Big).$$

Dim.: sia $\varphi(y,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(yx+s)\,dx$.

(i) $⨍_0^T \varphi(y,s)\,ds = ⨍_0^T \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(yx+s)\,dx \right) ds \overset{\text{Fubini}}{=}$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \left(⨍_0^T h(yx+s)\,ds \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, a\,dx = ma$

(ii) $\varphi(y,s) - \varphi(y,0) \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} 0$

$|\varphi(y,s) - \varphi(y,0)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} g(z) h(yz+s)\,dz - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) h(yx)\,dx \right| =$
$\underset{yx = yz+s}{=} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(g(x - \tfrac{s}{y}) - g(x) \right) h(yx)\,dx \right| \leq$
$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau_{\frac{s}{y}} g(x) - g(x)| |h(yx)|\,dx \leq \|h\|_\infty \|\tau_{\frac{s}{y}} g - g\|_1 \to 0$.

$|\varphi(y,0) - ma| = \left| ⨍_0^T \varphi(y,0)\,ds - ⨍_0^T \varphi(y,s)\,ds \right| \leq$
$\leq ⨍_0^T |\varphi(y,0) - \varphi(y,s)|\,ds \xrightarrow{y\to\pm\infty} 0$ per convergenza dominata
(la dominazione è $2\|\varphi\|_\infty = 2\|h\|_\infty \|g\|_1$). $\square$

Sia $S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f) e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\,dt\, e^{inx} =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t)\,dt$ ("$= f * D_N(x)$"),

$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = e^{-iNt}\sum_{n=0}^{2N} e^{int} = e^{-iNt}\frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1} =$
$= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t} - e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} = \frac{\sin\left((N+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(t/2)}$ (nucleo di Dirichlet)

$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,dt = \sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = 2\pi$.

Teorema: $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ L^1 (estesa per periodicità) α-hölderiana in $\bar{x}$, $\alpha > 0$. Allora $S_N f(\bar{x}) \to f(\bar{x})$.

Dim.: $|S_N f(\bar{x}) - f(\bar{x})| = \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s) D_N(\bar{x}-s)\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x}) D_N(t)\,dt \right| =$
$\underset{t = \bar{x}-s}{=} \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\bar{x}-t) - f(\bar{x}) \right) D_N(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{|f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})|}{|\sin(t/2)|}}_{g(t)} \underbrace{\sin((N+\tfrac{1}{2})t)}_{h(t)}\,dt \to$

$\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ per Riemann-Lebesgue. Serve però $g \in L^1$.
Sia $\delta > 0$ t.c. $\exists M > 0$ t.c. $|\bar{x} - x| \leq \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(x)| \leq M|\bar{x} - x|^\alpha$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})|}{|\sin(t/2)|}\,dt = \int_{|t|\leq\delta} \frac{|f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})|}{|\sin(t/2)|}\,dt + \int_{\delta<|t|\leq\pi} \frac{|f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})|}{|\sin(t/2)|}\,dt.$$

$\delta < |t| \leq \pi \Rightarrow \sin(\delta/2) \leq |\sin(t/2)| \leq 1$, quindi il secondo integrale è finito perché $f \in L^1$.

Prendendo $\delta < \frac{\pi}{2}$, $|t| \leq \delta \Rightarrow |\sin(t/2)| \geq \frac{|t|}{\pi}$. Allora
$$\int_{|t|\leq\delta} \frac{|f(\bar{x}-t) - f(\bar{x})|}{|\sin(t/2)|}\,dt \leq \int_{|t|\leq\delta} \frac{M|t|^\alpha}{|t|/\pi}\,dt \underset{\alpha>0}{<} +\infty. \quad \square$$

Oss.: questo teorema può essere usato per dare una dimostrazione alternativa che $\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ è una base di Hilbert di L^2, ma qui la ometto.