Def.: X s.v. normato è di Hilbert se $\exists \langle\,;\,\rangle$ prodotto scalare t.c. $\|x\|^2 = \langle x; x\rangle$ e X è completo (rispetto a $\|\cdot\|$). Consideriamo qui il caso reale, anche se applicheremo la teoria per spazi complessi, dove $\langle\,;\,\rangle$ è un prodotto hermitiano ($\langle y; x\rangle = \overline{\langle x; y\rangle}$). Nel seguito, indichiamo con H uno spazio di Hilbert.

Formule facili: parallelogramma, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
polarizzazione, $\langle x; y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ $\left(\Rightarrow \underset{\text{continuo}}{\langle\,;\,\rangle}\right)$

Cosa non ovvia: X normato + parallelogramma $\Rightarrow$ polarizzazione definisce un prodotto scalare (il problema è la bilinearità).

$L^2([-1,1]; \mathbb{C})$ è spazio di H. complesso con $\langle f; g\rangle = \int f\bar{g}$ (ben definito per Hölder).

Fatto: $L^p([-1,1]; \mathbb{C})$ spazio di H. $\Rightarrow p = 2$.

Dim.: $f = \mathbb{1}_{[-1,0]}$, $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$, parallelogramma $\Rightarrow$
$\Rightarrow \|f+g\|_p^2 + \|f-g\|_p^2 = 2\|f\|_p^2 + 2\|g\|_p^2$

$$\underset{\|}{2\cdot 2^{2/p}} = 4 \Rightarrow 1 + \frac{2}{p} = 2 \Rightarrow p = 2. \quad \square$$

Lemma: $\{e_n\}$ ortonormale in H, $(a_n) \in \ell^2$. (i) $\sum a_n e_n \to \bar{x} \in H$
(ii) $\bar{x}_n := \langle \bar{x}; e_n\rangle = a_n$ (iii) $\|\bar{x}\|^2 = \sum a_n^2$.

Dim.: (i) $\left\| \sum_{n=0}^{N} a_n e_n - \sum_{n=0}^{M} a_n e_n \right\|^2 \underset{(N>M)}{=} \left\| \sum_{n=M+1}^{N} a_n e_n \right\|^2 \underset{e_n \text{ ortonormali}}{=} \sum_{n=M+1}^{N} a_n^2 \leq \sum_{n>M} a_n^2 \xrightarrow{M\to+\infty} 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} a_n e_n$ di Cauchy.

(ii) $\forall N > n$, $\left\langle \sum_{j=0}^{N} a_j e_j; e_n \right\rangle = a_n$
$\downarrow \to$ continuità di $\langle\,;\,\rangle$
$\langle \bar{x}; e_n\rangle$

(iii) $\left\| \sum_{n=0}^{N} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=0}^{N} a_n^2 \uparrow \sum a_n^2$
$\downarrow \to$ continuità di $\|\cdot\|$
$\|\bar{x}\|^2$ $\square$

Teorema (della base di Hilbert): $\mathcal{F} = \{e_n\}$ ortonormale in H, $x \in H$.
(i) $\sum x_n^2 \leq \|x\|^2$ (Bessel) (ii) $\sum x_n e_n \to \bar{x}$, $\bar{x}_n = x_n$ (iii) $\|\bar{x}\|^2 = \sum x_n^2$
(iv) $x - \bar{x} \perp e_n \ \forall n$ ($\Rightarrow \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$) (v) se $\mathcal{F}$ è completo, ovvero una base di Hilbert (cioè $\mathrm{Span}(\mathcal{F})$ è denso in H), $x = \bar{x}$

Dim.: (i) $x = \sum_{n=0}^{N} x_n e_n + y$. $\langle y; e_n\rangle = \left\langle x - \sum_{m=0}^{N} x_m e_m; e_n \right\rangle =$
$= \langle x; e_n\rangle - x_n = 0 \ \forall n = 0, 1, \dots, N \Rightarrow$ tutti gli addendi sono ortogonali $\Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{N} x_n^2 + \|y\|^2 \geq \sum_{n=0}^{N} x_n^2 \uparrow \sum x_n^2$.

(ii) e (iii) seguono dal lemma.

(iv) $\langle x - \bar{x}; e_n\rangle = \langle x; e_n\rangle - \langle \bar{x}; e_n\rangle = x_n - \bar{x}_n = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - \bar{x} \perp e_n \ \forall n \Rightarrow x - \bar{x} \perp \mathrm{Span}(\mathcal{F}) \underset{\langle\,;\,\rangle \text{ continuo}}{\Rightarrow} x - \bar{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$

(v) $x - \bar{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})} \underset{\text{se } \mathcal{F} \text{ completo}}{=} H \Rightarrow x - \bar{x} = 0$. $\square$

Cor.: $x, x' \in H$, $\mathcal{F}$ base di H.. (i) $x_n = x'_n \ \forall n \Rightarrow x = x'$ (ii) $\langle x; x'\rangle \overset{\text{Parseval}}{=} \sum x_n x'_n$
(iii) $(a_n) \in \ell^2 \Rightarrow \sum a_n e_n = \bar{x} \in H$, $\bar{x}_n = a_n$ (iv) $\underset{x \mapsto (x_n)}{H \to \ell^2}$ è un'isometria suriettiva.

Dim.: (i) da (v) del teo.
(ii) dal teo., $\|x\|^2 = \sum x_n^2$. Usiamo polarizzazione
(iii) lemma (iv) da (iii) e Parseval $\square$

La base di H. NON è una base algebrica. Es.: $\mathcal{F}$ base canonica in ℓ^2, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} e_n$. Se $x = \sum_{j=0}^{m} a_j e_{n_j}$, per il teorema
$2^{-n} = x_n = 0 \ \forall n \neq n_j$, assurdo.

Abbiamo trattato il caso $\mathcal{F}$ numerabile. La cardinalità di $\mathcal{F}$ è legata alla separabilità di H, ma ometterò la trattazione. Invece, $\mathcal{F}$ numerabile e ortonormale è una base di H. $\Leftrightarrow$ è massimale $\left(\overset{\text{Zorn}}{\Rightarrow} \forall H \ \exists \text{ base di } H\right)$.
($\Rightarrow$) $x \in \mathcal{F}$, $x \perp e_n \ \forall n \Rightarrow x \perp \mathrm{Span}(\mathcal{F}) \Rightarrow x \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})} \Rightarrow x = 0$
($\Leftarrow$) la contronominale ci dice che $\exists x \in H$ t.c. $x \neq \bar{x}$ come nel teorema ($x \in H \setminus \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})}$), quindi $0 \neq \frac{x - \bar{x}}{\|x - \bar{x}\|} \perp \mathcal{F}$.

Facendo attenzione nelle dimostrazioni, non serve neanche numerare $\mathcal{F} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum x_n e_n$ converge incondizionatamente.

Prop.: V sottospazio chiuso di H (i) $H = V + V^{\perp}$ (ii) la rappresentazione è unica
(iii) $\|x - \bar{x}\| = \min_{y \in V} \|x - y\|$ e questo caratterizza $\bar{x}$.
$x = \underset{V}{\bar{x}} + \underset{V^{\perp}}{\tilde{x}}$

Dim.: (i) V chiuso in H completo $\Rightarrow V$ completo $\Rightarrow V$ di Hilbert.
Sia $\mathcal{F}$ base di H. di V e $\bar{x}$ come nel teo.. Allora
$\tilde{x} = x - \bar{x} \perp \overline{\mathrm{Span}(\mathcal{F})} = V \Rightarrow \tilde{x} \in V^{\perp}$.
(ii) $\bar{x} + \tilde{x} = \bar{x}' + \tilde{x}' \Rightarrow \underset{V}{\bar{x} - \bar{x}'} = \underset{V^{\perp}}{\tilde{x}' - \tilde{x}} \Rightarrow = 0$.

(iii) $\|x - y\|^2 = \|\underset{V^{\perp}}{(x - \bar{x})} + \underset{V}{(\bar{x} - y)}\|^2 = \|x - \bar{x}\|^2 + \|\bar{x} - y\|^2 \geq \|x - \bar{x}\|^2$ e
$= \Longleftrightarrow y = \bar{x}$. $\square$

Lemma: $\Lambda: V \to \mathbb{R}$ lineare $\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(\Lambda)^{\perp}) = 0 \vee 1$.

Dim.: per assurdo, $\dim(\mathrm{Ker}(\Lambda)^{\perp}) \geq 2$. Allora sia $W \subseteq \mathrm{Ker}(\Lambda)^{\perp}$ sottospazio di dimensione 2. $\Lambda_{|W}$ ha Ker banale, assurdo per questioni di dimensioni. $\square$

Prop.: $\Lambda: H \to \mathbb{R}$ lineare continuo $\Rightarrow \Lambda(x) = \langle x; x_0\rangle$, $x_0 \in H$.

Dim.: Λ continuo $\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\Lambda$ chiuso $\underset{\text{prop.}}{\Rightarrow} H = \mathrm{Ker}\,\Lambda + (\mathrm{Ker}\,\Lambda)^{\perp}$. Per il lemma, o $(\mathrm{Ker}\,\Lambda)^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \mathrm{Ker}\,\Lambda = H \Rightarrow \Lambda(x) \equiv 0 = \langle x; 0\rangle$, oppure $(\mathrm{Ker}\,\Lambda)^{\perp} = \mathrm{Span}(x_1)$, $\|x_1\| = 1$. Sia $x_0 = c x_1$, $c = \Lambda(x_1) \neq 0$, $\tilde{\Lambda}(x) = \langle x; x_0\rangle$.
Se $x \in \mathrm{Ker}\,\Lambda$, $\Lambda(x) = 0 \underset{x_0 \in (\mathrm{Ker}\,\Lambda)^{\perp}}{=} \langle x; x_0\rangle = \tilde{\Lambda}(x)$.

Se $x \in (\mathrm{Ker}\,\Lambda)^{\perp}$, $x = \lambda x_1 \Rightarrow \Lambda(x) = \lambda c = \langle \lambda x_1; c x_1\rangle = \langle x; x_0\rangle = \tilde{\Lambda}(x)$.
$\Lambda = \tilde{\Lambda}$ su $\mathrm{Ker}\,\Lambda$ e $(\mathrm{Ker}\,\Lambda)^{\perp} \Rightarrow$ su H. $\square$

Esempio di funzionale lineare non continuo: $\mathcal{F}$ base canonica in ℓ^2, $\Lambda(e_n) = n$ (non è limitato sui limitati).

Nota nel caso complesso: $x_n := \langle x; e_n\rangle \neq \langle e_n; x\rangle$. Il resto è più o meno, uguale con le dovute accortezze.