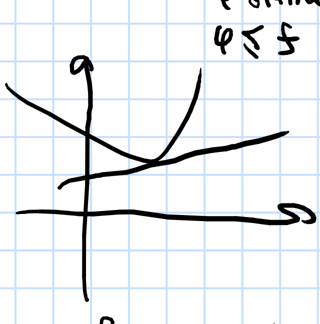
Jensen: μ probabilità su X, $u: X \to \mathbb{R}^d$ sommabile, $f: \mathbb{R}^d \to (-\infty, +\infty]$ convessa sci. Allora $f \circ u$ è integrabile e $f\left(\int_X u \, d\mu\right) \leq \int_X f \circ u \, d\mu$.

Dim.: $f(y) = \sup_{\substack{\varphi \text{ affine}, \\ \varphi \leq f}} \varphi(y)$. Vediamolo per $d = 1$:



basta prendere $\varphi(x) = f(y) + m(x - y)$
$m \in [f'(y^-), f'(y^+)]$

Allora $f \circ u \geq \varphi \circ u \Rightarrow \int_X f \circ u \, d\mu \geq \int_X \varphi \circ u \, d\mu =$
$= \varphi\left(\int_X u \, d\mu\right)$ e passo al sup su φ.
φ affine

Inoltre $(f \circ u)^- \leq (\varphi \circ u)^- = (au + b)^- \leq |au + b| \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $(f \circ u)^-$ sommabile $\Rightarrow f \circ u$ integrabile. $\square$
u sommabile

Young: $a_1, a_2 \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$ e $= \iff a_1 = a_2$.

Dim.: WLOG $a_1, a_2 > 0$. Passo ai log:
$\lambda_1 \log a_1 + \lambda_2 \log a_2 \leq \log(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2)$ e la tesi segue dalla stretta concavità del logaritmo. $\square$

Hölder: $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 \Rightarrow \|f_1 f_2\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$.

Dim.: $\int |f_1 f_2| \overset{p_1, p_2 < +\infty}{=} \int (\gamma^{p_1} |f_1|^{p_1})^{1/p_1} (\gamma^{-p_2} |f_2|^{p_2})^{1/p_2} \leq$
$\underset{\text{Young}}{\leq} \int \frac{1}{p_1} \gamma^{p_1} |f_1|^{p_1} + \frac{1}{p_2} \gamma^{-p_2} |f_2|^{p_2} = \frac{\gamma^{p_1}}{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} + \frac{\gamma^{-p_2}}{p_2} \|f_2\|_{p_2}^{p_2} =$
$= \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$
scegliendo γ t.c. vale l'uguale in Young, cioè $\gamma^{p_1} \|f_1\|_{p_1}^{p_1} = \gamma^{-p_2} \|f_2\|_{p_2}^{p_2}$
(se una delle due norme è 0 o sono entrambe positive e una è $+\infty$, è un caso facile a parte).
$p_1 = 1$, $p_2 = +\infty$ (o viceversa): $\int |f_1 f_2| \leq \int \|f_2\|_\infty |f_1| = \|f_1\|_1 \|f_2\|_\infty$. $\square$

Minkovski: $\|f_1 + f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$.

Dim.: $p = +\infty$ è facile. $\|f_1 + f_2\|_p = 0$ è facile. $p < +\infty$, $0 < \|f_1 + f_2\|_p < +\infty$:
$\|f_1 + f_2\|_p^p \leq \int |f_1 + f_2|^p \leq \int |f_1| |f_1 + f_2|^{p-1} + \int |f_2| |f_1 + f_2|^{p-1} \leq$
$\leq \|f_1\|_p \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q + \|f_2\|_p \| |f_1 + f_2|^{p-1} \|_q = (\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) \|f_1 + f_2\|_p^{p-1} \Rightarrow$
Hölder, $q = \frac{p}{p-1}$
$\Rightarrow$ tesi. Se $\|f_1 + f_2\|_p = +\infty$, usiamo che
$\left|\frac{f_1 + f_2}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2} |f_1|^p + \frac{1}{2} |f_2|^p \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f_1 + f_2\|^p \leq 2^{p-1} (\|f_1\|^p + \|f_2\|^p)$. $\square$

Def.: X spazio con misura μ, $\mathcal{L}^p = \{f: X \to \mathbb{R} \mid \|f\|_p < +\infty\}$, $L^p = \mathcal{L}^p/_\sim$, $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 = f_2$ q.o.. È facile vedere che $\|\cdot\|_p$ è una seminorma su $\mathcal{L}^p$ e $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ q.o. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ è una norma su L^p. Vogliamo dimostrare che gli spazi L^p sono completi.

Prop.: (Y, d) s.m.. (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} d(y_n, y_{n+1}) \overset{(\ast)}{<} +\infty \Rightarrow (y_n)$ di Cauchy
(ii) $\forall (y_n)$ t.c. $(\ast)$, $y_n \to y \Rightarrow Y$ completo

Dim.: $\sum_{n=0}^{N} d(y_n, y_{n+1}) =: x_{N+1}$ converge $\Rightarrow$ è di Cauchy.
$d(y_l, y_m) \leq \sum_{n=l}^{m-1} d(y_n, y_{n+1}) = x_m - x_l \Rightarrow (y_n)$ di Cauchy.
(ii) Data una successione di Cauchy, è facile estrarre una sottosuccessione t.c. vale $(\ast)$. $\square$

Prop.: $(Y, \|\cdot\|)$ spazio normato. Y è completo $\iff \forall (y_n)$ t.c. $\sum \|y_n\| < +\infty$ $\sum y_n$ converge.

Dim.: segue dalla prop. precedente. $\square$

Minkovski infinito: $g_n \geq 0 \Rightarrow \|\sum g_n\|_p \leq \sum \|g_n\|_p$.

Dim.: $\|\sum^N g_n\|_p \leq \sum^N \|g_n\|_p \to \sum \|g_n\|_p$
$\|\sum^N g_n\|_p = \left(\int |\sum^N g_n|^p\right)^{1/p} \to \left(\int |\sum g_n|^p\right)^{1/p} = \|\sum g_n\|_p$ (convergenza monotona ($g_n \geq 0$)) $\square$

Teorema: L^p è completo $\forall p \in [1, +\infty]$.

Dim.: $p = +\infty$ è facile. $p < +\infty$: per la prop. precedente, ci basta prendere f_n t.c. $\sum \|f_n\|_p < +\infty$. Allora $\|\sum |f_n|\|_p \leq \sum \| |f_n| \|_p < +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum |f_n| < +\infty$ q.o.. Sia $f = \sum f_n$ dove $\sum |f_n| < +\infty$ e 0 altrove.
$|f - \sum_{n=1}^{N} f_n| = |\sum_{n > N} f_n| \leq \sum_{n > N} |f_n| \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f - \sum_{n=1}^{N} f_n\|_p \leq \|\sum_{n > N} |f_n|\|_p \leq \sum_{n > N} \|f_n\|_p \to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{n=0}^{N} f_n \to f$ in L^p. $N = 0 \Rightarrow \|f\|_p \leq \sum \|f_n\|_p < +\infty \Rightarrow f \in L^p$. $\square$

Def.: $f_n \to f$ in misura se $\mu\{x \mid |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$.

Prop.: (i) $\mu(X) < +\infty$, $f_n \to f$ q.o. $\Rightarrow$ in misura
(ii) $\mu(X) < +\infty$, $f_n \to f$ q.o. $\Rightarrow \forall \delta > 0\ \exists E$ t.c. $\mu(E) \leq \delta$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$ (Severini–Egorov)
(iii) $p < +\infty$, $f_n \to f$ in $L^p \Rightarrow$ in misura
(iv) $f_n \to f$ in $L^\infty \Rightarrow \exists E$ t.c. $\mu(E) = 0$ e $f_n \to f$ uniformemente su $X \setminus E$
(v) $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow \exists n_k$ t.c. $f_{n_k} \to f$ q.o.

Dim.: $A_n^\varepsilon = \{x \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, $B_m^\varepsilon = \bigcup_{n \geq m} A_n^\varepsilon$, $B^\varepsilon = \bigcap_m B_m^\varepsilon$.
(i) $\mu(B^\varepsilon) = 0\ \forall \varepsilon > 0$, ma $\mu(X) < +\infty \Rightarrow \mu(B^\varepsilon) = \lim_{m \to +\infty} \mu(B_m^\varepsilon)$ e $\mu(A_m^\varepsilon) \leq \mu(B_m^\varepsilon)$.
(ii) $\lim_{m \to +\infty} \mu(B_m^\varepsilon) = 0\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists m_k$ t.c. $\mu(B_{m_k}^{1/k}) \leq \frac{\delta}{2^k}$.
Sia $E = \bigcup_k B_{m_k}^{1/k}$. $x \notin E \Rightarrow x \notin B_{m_k}^{1/k}\ \forall k \Rightarrow$
$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k}\ \forall n \geq m_k \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ su $X \setminus E$.
(iii) $\mu(|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon) = \mu(|f_n(x) - f(x)|^p \geq \varepsilon^p) \leq$
$\underset{\text{Markov}}{\leq} \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p} \to 0$. (iv) Facile.
(v) Sia n_k t.c. $\mu(A_{n_k}^{1/k}) \leq \frac{1}{2^k} \Rightarrow \sum \mu(A_{n_k}^{1/k}) < +\infty \Rightarrow$
$\underset{\text{Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} \mu(\{x \mid x \in A_{n_k}^{1/k} \text{ freq.}\}) = 0$. $\{x \mid x \in A_{n_k}^{1/k} \text{ freq.}\}^c =$
$= \{x \mid x \notin A_{n_k}^{1/k} \text{ def.}\} = \{|f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \text{ def.}\}$. $\square$

Controesempio alle implicazioni inverse (alcune):
$I_k = \left[\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{n}\right]$ proiettato su $[0, 1]$ con $x - \lfloor x \rfloor$.

Approssimazioni

Prop.: le funzioni limitate sono dense in L^p per $p < +\infty$.

Dim.: sia $f_m = (f \vee m) \wedge (-m)$. Allora $|f_m| \leq |f|$ e $f_m \to f$ q.o., quindi $\|f - f_m\|_p \to 0$ per convergenza dominata. $\square$

Prop.: sia X s.m., le funzioni a supporto limitato sono dense in L^p per $p < +\infty$.

Dim.: sia $f_r = f \cdot 1\!\!1_{B(x_0, r)}$. Come sopra. $\square$

Prop.: le funzioni limitate a supporto limitato sono dense in L^p per $p < +\infty$.

Dim.: sia g limitata t.c. $\|f - g\|_p \leq \varepsilon/2$ e r t.c. $\|g - g \cdot 1\!\!1_{B(x_0, r)}\|_p \leq \varepsilon/2$. Allora $g \cdot 1\!\!1_{B(x_0, r)}$ è limitata a supporto limitato e t.c. $\|g \cdot 1\!\!1_{B(x_0, r)} - f\|_p \leq \varepsilon$. $\square$

Sia $\mathcal{S} = \{f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1\!\!1_{E_i} \mid E_i \text{ sono limitati}, \mu(E_i) < +\infty\}$.

Prop.: $\mathcal{S}$ è denso in L^p per $p < +\infty$.

Dim.: con un argomento diagonale, ci basta approssimare f limitata a supporto limitato. Sia $f_\varepsilon = \sum_{k=1}^{+\infty} k\varepsilon \cdot 1\!\!1_{E_k}$, $E_k = \{x \mid k\varepsilon \leq f(x) < (k+1)\varepsilon\}$.
f lim. $\Rightarrow$ la somma è finita. f a supp lim. $\Rightarrow E_k$ lim..
$+\infty > \|f\|_p^p \geq \int_{E_k} |f|^p \geq k^p \varepsilon^p \mu(E_k) \Rightarrow \mu(E_k) < +\infty$.
$0 \leq f - f_\varepsilon \leq \varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon \to f$ q.o. e $|f_\varepsilon - f| \leq 2|f|$, quindi $\|f - f_\varepsilon\|_p \to 0$ per convergenza dominata. $\square$

Prop.: X misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^d$. C_c è denso in L^p per $p < +\infty$.

Dim.: WLOG mi basta approssimare $1\!\!1_E$ con E limitato ($\Rightarrow |E| < +\infty$).
Per la regolarità della misura di Lebesgue, siano A_ε e C_ε t.c. $C_\varepsilon \subset E \subset A_\varepsilon$, C_ε chiuso, A_ε aperto limitato e $|A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$.
Sia
$$g_\varepsilon: \mathbb{R}^d \to [0, 1], \quad x \mapsto \frac{d(x, A_\varepsilon^c)}{d(x, A_\varepsilon^c) + d(x, C_\varepsilon)}$$
. g_ε è continua, vale 1 in C_ε e 0 in $A_\varepsilon^c \Rightarrow$ è a supp cpt.
$\|g_\varepsilon - 1\!\!1_E\|_p^p = \int |g_\varepsilon - 1\!\!1_E|^p \leq |A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon| \leq \varepsilon$. $\square$

Caso $p = +\infty$: se $f_n \to f$ in L^∞ con le f_n continue, allora le f_n sono di Cauchy in L^∞ e quindi uniformemente $\Rightarrow$
$\Rightarrow f_n \to \tilde{f}$ uniformemente, $\tilde{f}$ continua $\Rightarrow f = \tilde{f}$ q.o., ma $1\!\!1_{[0, +\infty)}$ non può essere $=$ q.o. a una funzione continua.

Lusin: X Lebesgue mis., $f: X \to \mathbb{R}$ mis.. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists E$ aperto t.c. $|E| \leq \varepsilon$ e f è continua su $X \setminus E$.

Dim.: per la regolarità della misura di Lebesgue, ci basta E misurabile.
Caso $|X| < +\infty$, f limitata: $f \in L^1 \Rightarrow \exists f_n \in C_c$ t.c. $f_n \to f$ in $L^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ in misura $\underset{\text{sottosuccessione}}{\Rightarrow}$ q.o. $\underset{\text{Severini–Egorov}}{\Longrightarrow}$ uniformemente su $X \setminus E$, $|E| \leq \varepsilon \Rightarrow$
$\underset{f_n \text{ continue}}{\Rightarrow} f$ continua su $X \setminus E$. $|X| < +\infty$, f qualunque:
Sia $F_n = \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$. $F_n \downarrow \emptyset$, $|X| < +\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow |F_n| \to 0 \Rightarrow \exists n$ t.c. $|F_n| \leq \varepsilon/2$ e $|f| \leq n$ su $X \setminus F_n$. Ripeto ora la dim. di prima.

Caso X, f qualunqui: $X_n = X \cap B(0, n)$, E_n t.c. f è continua in $X_n \setminus E_n$ e $|E_n| \leq \varepsilon/2^n$. $E = \bigcup_n E_n \Rightarrow |E| \leq \varepsilon$ e $X_n \setminus E \subset X_n \setminus E_n \Rightarrow f$ continua in $X_n \setminus E$. X_n aperto in $X \Rightarrow$
$\Rightarrow X_n \setminus E$ aperto in $X \setminus E$. Allora, f è continua in $\bigcup_n X_n \setminus E = X \setminus E$. $\square$