Data $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx$. Allora $\hat{f}$ è ben definita, C_0 e $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Dim.: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-ixy}| dx = \|f\|_1 < +\infty \Rightarrow \hat{f}(y)$ è ben def. $\forall y$.

$|\hat{f}(y)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{-ixy}| dx = \|f\|_1$.

Poiché e^{-ixy} è continua in y e $|f(x) e^{-ixy}| = |f(x)|$, $\hat{f}$ è continua per convergenza dominata. $f \in L^1$, e^{-ix} L^∞, 2π-periodica con integrale nullo sul periodo $\underset{RL}{\Longrightarrow} \hat{f}(y) \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} 0$. □

Cor.: $\mathcal{F}: L^1 \to C_0$, $f \mapsto \hat{f}$ è lineare e continua.

Con dei semplici calcoli, $\widehat{\tau_h f} = e^{-ihy} \hat{f}$, $\widehat{e^{ixh} f} = \tau_h \hat{f}$, $\widehat{\sigma_\delta f} = \hat{f}(\delta y)$. (facili)

Prop.: f C^1, $f, f' \in L^1 \Rightarrow \widehat{f'} = iy \hat{f}$.

Dim.: siano $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ t.c. $f(a_n), f(b_n) \to 0$.

$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy} dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-ixy} dx =$

$= \lim_{n \to +\infty} \left(\left[f(x) e^{-ixy} \right]_{a_n}^{b_n} + iy \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-ixy} dx \right) =$

$= iy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx = iy \hat{f}(y)$. □

Prop.: $f \in L^1$, $xf \in L^1 \Rightarrow \hat{f}$ C^1 e $\hat{f}' = \widehat{-ixf}$.

Dim.: DUTIS $\Rightarrow \hat{f}'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} -ix f(x) e^{-ixy} dx = \widehat{-ixf}(y)$. □

Prop.: $f_1 \in L^1$, $f_2 \in L^1$ ($\Rightarrow f_1 * f_2 \in L^1$) $\Rightarrow \widehat{f_1 * f_2} = \hat{f_1} \hat{f_2}$.

Dim.: $\widehat{f_1 * f_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 * f_2(x) e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t) f_2(t) dt \right) e^{-ixy} dx =$

$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t) e^{-i(x-t)y} dx \right) f_1(t) e^{-ity} dt \underset{z = x-t}{=}$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) e^{-izy} dz \right) f_1(t) e^{-ity} dt = \hat{f_1}(y) \hat{f_2}(y)$. □

Teorema: $f, \hat{f} \in L^1 \Rightarrow \mathcal{F}^* \mathcal{F} f = \check{\hat{f}} = 2\pi f$ q.o. (e $\mathcal{F} \mathcal{F}^* f = 2\pi f$ q.o.).

Dim.: Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in 0, $\varphi(0) = 1$, limitata e t.c. $\varphi, \check{\varphi} \in L^1$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) \varphi(\delta y) e^{ixy} dy \xrightarrow[\delta \to 0]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy$ per convergenza dominata.

$\|$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ity} dt \right) \varphi(\delta y) e^{ixy} dy =$

$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta y) e^{i(x-t)y} dy \right)}_{\widecheck{\varphi(\delta \cdot)}(x-t) = \sigma_\delta \check{\varphi}(x-t)} f(t) dt = f * \sigma_\delta \check{\varphi}(x)$.

$f * \sigma_\delta \check{\varphi} \xrightarrow{\delta \to 0} mf$ in L^1 e, a meno di sottosuccessioni, q.o., dove $m = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{\varphi}(x) dx$. $\varphi(y) = e^{-y^2/2} \Rightarrow \check{\varphi}(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x^2/2} \Rightarrow m = 2\pi$. □

Cor.: $\mathcal{F}$ è iniettiva su L^1.

Dim.: $f_1, f_2 \in L^1$ t.c. $\hat{f_1} = \hat{f_2} \Rightarrow f_1 - f_2 \in L^1$ e $\widehat{f_1 - f_2} = 0 \in L^1 \Rightarrow$

$\underset{\text{teo.}}{\Longrightarrow} f_1 - f_2 = \frac{1}{2\pi} 2\pi (f_1 - f_2) \underset{\text{q.o.}}{=} \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* \mathcal{F}(f_1 - f_2) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}^* 0 = 0$. □

Teorema: $f \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow \|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f\|_2$.

Dim.: Sia $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua in 0, $\varphi(0) = 1$, pari, decrescente sui positivi e t.c. $\varphi, \check{\varphi} \in L^1$ (la stessa di prima va bene).

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 \varphi(\delta y) dy \xrightarrow{\delta \to 0} \|\hat{f}\|_2^2$ per convergenza monotona

$\|$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{ity} dt \right) \varphi(\delta y) dy =$

$\underset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{f(t)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\delta y) e^{i(t-x)y} dy \right) dx \right) dt =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} \cdot f * \sigma_\delta \check{\varphi}(t) dt = \langle f * \sigma_\delta \check{\varphi}; f \rangle \xrightarrow{\delta \to 0} m \langle f; f \rangle = 2\pi \|f\|_2^2$

perché $f * \sigma_\delta \check{\varphi} \xrightarrow{\delta \to 0} mf$ in L^2, il prodotto scalare è continuo e m è lo stesso di prima. □

Cor.: poiché $L^1 \cap L^2$ è denso in L^2, $\mathcal{F}$ si può estendere e, oltre a essere lineare, è un'isometria suriettiva.

Per continuità, valgono le (facili) anche per $f \in L^2$.

Plancherel: $\langle \hat{f_1}; \hat{f_2} \rangle = 2\pi \langle f_1; f_2 \rangle$ (segue dall'identità di polarizzazione).

Prop.: f continua C^1 a tratti, $f \in \underset{(L^1 + L^2)}{L^1 \cup L^2}$, $f' \in \underset{(L^1 + L^2)}{L^1 \cup L^2} \Rightarrow \widehat{f'} = iy \hat{f}$ q.o..

Dim.: Siano $a_n \to -\infty$, $b_n \to +\infty$ t.c. $f(a_n), f(b_n) \to 0$. Come sopra, ma attenzione: se $g \in L^2$, come diciamo che $\lim_{n \to +\infty} \int_{a_n}^{b_n} g(x) e^{-ixy} dx = \hat{g}(y)$?

Notiamo che $g_n := g \cdot \mathbb{1}_{[a_n, b_n]} \in L^1 \cap L^2$ ($L^2 \Rightarrow L^1$ se la misura del supporto è finita), dunque $\|\hat{g} - \hat{g}_n\|_2 = \sqrt{2\pi} \|g - g_n\|_2 \to 0$ (convergenza dominata), quindi $\hat{g}_n \to \hat{g}$ in L^2 e, a meno di sottosuccessioni, q.o. □

Prop.: f continua C^1 a tratti, $f \in L^1$, $f' \in L^2 \Rightarrow \hat{f} \in L^1$.

Dim.: $f' \in L^2 \Rightarrow \widehat{f'} = iy \hat{f} \in L^2 \Rightarrow y \hat{f} \in L^2$.

$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)| dy = \int_{|y| \leq 1} |\hat{f}(y)| dy + \int_{|y| \geq 1} |\hat{f}(y)| dy$

$\int_{|y| \leq 1} |\hat{f}(y)| dy \leq 2\|\hat{f}\|_\infty < +\infty$ (perché $\hat{f}$ C_0)

$\int_{|y| \geq 1} |\hat{f}(y)| dy = \int_{|y| \geq 1} |y \hat{f}(y)| \frac{1}{|y|} dy \underset{CS}{\leq} \underbrace{\left(\int_{|y| \geq 1} \frac{1}{|y|^2} dy \right)^{1/2}}_{< +\infty} \underbrace{\left(\int_{|y| \geq 1} |y \hat{f}(y)|^2 dy \right)^{1/2}}_{\leq \|y \hat{f}\|_2 < +\infty}$ □

Prop.: $f_1, f_2 \in L^2$ ($\Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in L^1$, per Hölder) $\Rightarrow \widehat{f_1 \cdot f_2} = \frac{1}{2\pi} \hat{f_1} * \hat{f_2}$ q.o..

Dim.: caso $f_1, f_2 \in C_c^1 \Rightarrow f_1, f_2, \hat{f_1}, \hat{f_2}, f_1 f_2, \hat{f_1} \hat{f_2} \in L^1$.

Ricordo che $\widehat{g_1 * g_2} = \hat{g_1} \hat{g_2} \Rightarrow \widecheck{g_1 * g_2} = \check{g_1} \cdot \check{g_2}$ per $g_1, g_2 \in L^1$ (stessa dim.).

$\frac{1}{2\pi} \hat{f_1} * \hat{f_2} \underset{\text{q.o.}}{=} \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F} \mathcal{F}^* (\hat{f_1} * \hat{f_2}) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}(\check{\hat{f_1}} \cdot \check{\hat{f_2}}) = \mathcal{F}(f_1 \cdot f_2) = \widehat{f_1 \cdot f_2}$.

Siano ora $f_{1,n}, f_{2,n} \in C_c^1$ t.c. $f_{i,n} \to f_i$ in L^2.

$\widehat{f_{1,n} \cdot f_{2,n}} = \frac{1}{2\pi} \widehat{f_{1,n}} * \widehat{f_{2,n}}$. Basta osservare che

$\cdot : L^2 \times L^2 \to L^1$, $* : L^2 \times L^2 \to L^\infty$, $\mathcal{F}: L^1 \to C_0$, $\mathcal{F}: L^2 \to L^2$

sono continue e, a meno di sottosuccessioni per alcune, tutte le convergenze sono q.o. □

Pauley-Wiener: $f \in L^1$, $supp(f)$ cpt $\Rightarrow f = g_{|\mathbb{R}}$, $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ olomorfa.

Dim.: $g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixz} dx$. È ben definita perché $|e^{-ixz}|$ è limitato per z fissato e $x \in supp(f)$ e $f \in L^1$.

$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ixz)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{x^n}{n!} dx \right)}_{a_n}$.

(Fubini, lo posso applicare perché $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|-ixz|^n}{n!} = e^{|xz|}$ e ragiono come prima per dire che tutto converge)

Allora ho scritto g come serie di potenze che converge $\forall z \in \mathbb{C}$. □

Disuguaglianza di Heisenberg: $u \in L^2 \Rightarrow \|xu\|_2 \|y\hat{u}\|_2 \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u\|_2^2$.

Dim.: facciamo solo il caso $u \in C_c^1$. Allora $\widehat{u'} = iy\hat{u}$, quindi

$\|xu\|_2 \|y\hat{u}\|_2 = \|xu\|_2 \|\widehat{u'}\|_2 \underset{\text{Plancherel}}{=} \sqrt{2\pi} \|xu\|_2 \|u'\|_2 \geq$

$\underset{CS}{\geq} \sqrt{2\pi} |\langle xu; -u' \rangle| \geq \sqrt{2\pi} Re(\langle xu; -u' \rangle) =$

$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Re(-xu(x)\overline{u'(x)}) dx$.

Osserviamo che $\left(\frac{|u(x)|^2}{2} \right)' = \left(\frac{u(x)\overline{u(x)}}{2} \right)' = \frac{u'(x)\overline{u(x)} + u(x)\overline{u'(x)}}{2} =$

$= Re(u(x)\overline{u'(x)})$. Allora integrando per parti troviamo

$\sqrt{2\pi} \left(\cancel{\left[\frac{|u(x)|^2}{2} \right]_{-\infty}^{+\infty}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|u(x)|^2}{2} dx \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|u\|_2^2$.

Approssimando si fa il caso generale, ma è delicato. □

Rilassando un po' le ipotesi in modo che la dimostrazione sopra funzioni ancora, troviamo il caso di uguaglianza: serve $u'(x) \underset{\text{q.o.}}{=} \alpha x u(x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e

$0 \leq \langle xu; -u' \rangle = -\bar{\alpha} \|xu\|_2^2 \in \mathbb{R}$. A parte $u = 0$ q.o., dev'essere $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq 0$. Allora u è una distribuzione gaussiana.

Esempi di calcolo di alcune trasformate di Fourier

$f(x) = e^{-|x|}$. $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{-ixy} dx =$

$= \int_0^{+\infty} e^{-x(iy+1)} dx + \int_{-\infty}^0 e^{-x(iy-1)} dx =$

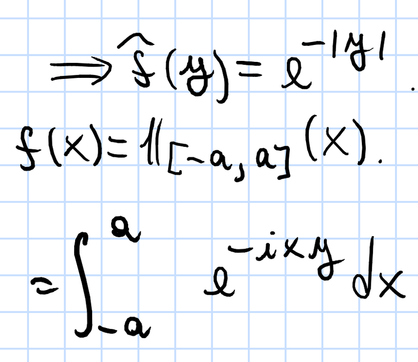
$= \left[\frac{e^{-x(iy+1)}}{-(iy+1)} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{-x(iy-1)}}{-(iy-1)} \right]_{-\infty}^0 =$

$= \frac{1}{1+iy} - \frac{1}{1-iy} = \frac{2}{1+y^2}$.

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Potremmo usare il teorema di inversione, ma usiamo il metodo dei residui:

$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx = \lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r^1} \frac{e^{-ixy}}{1+x^2} dx$,

$\int_{\gamma_r} \frac{e^{-izy}}{1+z^2} dx = 2\pi i \sum Res$.



Per ragioni di parità, WLOG $y < 0$, quindi $\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r^2} (\ldots) dx = 0$ per ovvie stime.

Ora, l'unico residuo che c'interessa è i, quindi

$\hat{f}(y) = 2\pi i \frac{e^{-i \cdot i \cdot y}}{2i} = \pi e^y$ per $y < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{f}(y) = e^{-|y|}$.

$f(x) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$. $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) e^{-ixy} dx =$

$= \int_{-a}^{a} e^{-ixy} dx = \left[\frac{e^{-ixy}}{-iy} \right]_{-a}^{a} = \frac{e^{iay} - e^{-iay}}{iy} =$

$= \frac{2}{y} \sin(ay)$.

$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Com'è noto, $\hat{f}(0) = 1$. Dalla teoria, $\hat{f}$ è C^1

e $\hat{f}'(y) = \widehat{-ixf}(y) = \widehat{if'}(y) = i(iy)\hat{f}(y) = -y\hat{f}(y)$.

(f verifica tutte le ipotesi)

L'ovvia soluzione a questo problema di Cauchy è $f(y) = e^{-y^2/2}$.

Alcuni risultati utili, omettendo le (facili) dimostrazioni:

f pari $\Rightarrow \hat{f}$ pari	f dispari $\Rightarrow \hat{f}$ dispari
f pari e reale $\Rightarrow \hat{f}$ pari e reale	f dispari e reale $\Rightarrow \hat{f}$ dispari e immaginaria pura