Richiami sui polinomi

$\mathbb{K}$ campo, $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^n$ spazio affine su $\mathbb{K}$ di $\dim = n$

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

Teo. (principio di identità dei polinomi):
$\# \mathbb{K} = +\infty$, $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ t.c. $f(p) = 0 \ \forall p \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \Rightarrow$
$\Rightarrow f = 0 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Dim.: induzione su n.
$n = 1$ ok per Ruffini
$n \Rightarrow n+1$ $\qquad x_1, \dots, x_n, y$
$f(x, y) = a_d(x) y^d + \dots + a_0(x)$, $a_d(x) \neq 0$ in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.
Per ipotesi induttiva $\exists\, Q \in \mathbb{A}^n$ t.c. $a_d(Q) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(Q, y) = a_d(Q) y^d + \dots + a_0(Q)$ non è $\equiv 0 \Rightarrow f(x, y)$ non è $\equiv 0$. $\square$

Ricordiamo: $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un dominio a fattorizzazione unica.
Idea della dim.: Teo.: A UFD $\Rightarrow A[x]$ UFD.
Cor.: $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è UFD. Dim.: $n = 1$ $\mathbb{K}[x]$ è euclideo.
$n \Rightarrow n+1$ $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n+1}] = \underbrace{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}_{A}[x_{n+1}]$.
Il passo induttivo è dato dal teorema. $\square$

$f \in A[x]$, $f(x) = a_d x^d + \dots + a_0$, $a_i \in A$
Def.: f è primitivo se $MCD(a_d, \dots, a_0) = 1$.
In generale: $f = a \cdot f_1$, $a \in A$, $f_1 \in A[x]$ primitivo.
$c(f)$ "contenuto di f"

K = campo delle frazioni di A
Lemma di Gauss: $f \in A[x]$, $\deg f > 0$
f è irriducibile in $A[x] \Leftrightarrow$ a) f è primitivo b) f è irriducibile in $K[x]$.

Es.: (1) $f = x_1 x_2 x_3 + x_2^3 + x_3^5 + x_2 x_3$ è irr.? $f \in \mathbb{K}[x_2, x_3][x_1]$.
(a) f è primitivo (b) $f \in \mathbb{K}(x_2, x_3)[x_1]$ è irr. perché di grado 1.
In generale: $f(x, y) = a(x) y + b(x)$, $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ è irr. $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a, b) = 1$ in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$.
(2) $f(x, y) = y^2 - p(x)$ è rid. $\Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{K}[x]$ t.c. $p = q^2$.
($\Leftarrow$) ovvia. ($\Rightarrow$) f è primitivo. f rid. se ha una radice $\lambda \in \mathbb{K}(x)$.
Scrivo $\lambda = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[x]$, $(\alpha, \beta) = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^2 = p(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x)\beta^2(x) = \alpha^2(x) \Rightarrow \beta \in \mathbb{K}$ (ex.).

$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ spazio proiettivo su $\mathbb{K}$ di $\dim = n$
$x_0, \dots, x_n$ coordinate omogenee su $\mathbb{P}^n$
$U_i = \{x_i \neq 0\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ carte affini
$U_0 \cup \dots \cup U_n = \mathbb{P}^n$.
$j: \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \xrightarrow{1:1} U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$ è una bigezione $\left([a_0, \dots, a_n] \xmapsto{j^{-1}} \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right)\right)$
$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto [1, x_1, \dots, x_n]$

$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ = s.v. dei pol. omogenei di grado d $\cup \{0\}$.
Se $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, $\exists !$ scrittura $f = \sum_{d \geq 0} f_d$, f_d omogeneo di grado d.
somma finita

Vale: $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_a \cdot \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_b = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_{a+b}$, cioè
$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è una $\mathbb{K}$-algebra graduata.
Oss.: $\# \mathbb{K} = +\infty$ $\quad f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è omogeneo di grado $d \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall p \in \mathbb{K}^{n+1}$ $f(\lambda p) = \lambda^d f(p)$.
($\Rightarrow$) ovvia. ($\Leftarrow$) ex..
In particolare ha senso considerare in $\mathbb{P}^n$ il luogo di zeri di un pol. omogeneo.
Inoltre, se $F, G \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$, $G \neq 0$
$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{F(x_0, \dots, x_n)}{G(x_0, \dots, x_n)}$ dà una funzione ben definita su $\mathbb{P}^n \setminus \{G = 0\}$.

Definisco:
$D: \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
$F(x_0, \dots, x_n) \longmapsto F(1, x_1, \dots, x_n)$
D è un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre.
deomogenizzazione

$H: \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$
$0 \neq f(x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$

Es.: $x_1^3 + 3x_2 + x_1 x_2 \xmapsto{H} x_1^3 + 3x_0^2 x_2 + x_0 x_1 x_2$
H non è un omomorfismo di anelli, ma: $H(fg) = H(f) H(g)$.
Vale: $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ $\quad (D \circ H)(f) = f \ \forall f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.
Sia $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$, scrivo $F(x) = x_0^\alpha F_1(x_0, \dots, x_n)$ con $x_0 \nmid F_1$.
$(H \circ D)(F) = H(D F_1) = F_1$.

Fattorizzazione di pol. omogenei: $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo, $x_0 \nmid F$.
Lemma: F è riducibile $\Leftrightarrow D(F)$ è riducibile.
Dim.: segue dalle proprietà di D e H. $\square$
Quindi: dato $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogeneo
scrivo $F = x_0^\alpha F_1$, $x_0 \nmid F_1$, fattorizzo $\overset{D(F_1)}{D(F)} =: f = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$,
$q_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ irr., $Q_i = H(q_i)$, allora $F = x_0^\alpha Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_m$ è
la fattorizzazione di F. In particolare, i fattori irr. di un pol. omogeneo sono omogenei.
Caso speciale: $n = 1$, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$
$F \in \mathbb{K}[x_0, x_1]_d$, $F = x_0^{m_0} F_1(x_0, x_1)$ $\quad x_0 \nmid F_1$
$D(F_1) = u \prod_{i=1}^{k} (a_i x_1 + b_i)^{m_i}$ dove $[a_i, b_i] \neq [a_j, b_j]$ se $i \neq j$
$\sum_{i=1}^{k} m_i = d - m_0$
$F = x_0^{m_0} \cdot \prod_{i=1}^{k} (a_i x_1 + b_i x_0)^{m_i}$
$\mathbb{P}^1 \supset \{F = 0\} = \{[0, 1], [a_i, -b_i], i = 1, \dots, k\}$.
se $m_0 > 0$ $\qquad$ molteplicità m_i