Ipersuperfici

$\mathbb{K}$ campo

ipersuperficie affine su $\mathbb{A}^n$ $[f]$, $0 = f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

($[\ ]$ classe per la relazione $f \sim g \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $f = \lambda g$)

$[f]$ è irriducibile se f è irriducibile

In generale: $f = c \cdot p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$ $c \in \mathbb{K}^*$, p_i irr. e distinti, $m_i > 0$

$[f] = m_1[p_1] + \ldots + m_k[p_k]$. $[p_i]$ sono le componenti irr. di $[f]$, m_i = molteplicità. $[f]$ è ridotta se $m_i = 1 \ \forall i$.

$\deg[f] := \deg f \Rightarrow \deg[f] = \sum_{i=1}^{k} m_i \deg p_i$.

$V(f) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0\}$ è il supporto di $[f]$.

Es.: $d = \deg f$

$d = 1$: iperpiani affini, $[f] \mapsto V(f)$ è 1:1

$d = 2$: coniche e quadriche

$n = 2$ curve piane, $n = 3$ superfici

$[f] = m_1[p_1] + \ldots + m_k[p_k]$

$V(f) = V(p_1) \cup \ldots \cup V(p_k)$ (ho perso le molteplicità!)

Es.: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $f = x^2 + 1 \Rightarrow V(f) = \emptyset$ (ho perso f !)

Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$: $n = 1$, $f \in \mathbb{K}[x]$ ridotto (square free)

$f(x) = c \prod_{i=1}^{d} (x - a_i)$, a_i distinti

$V(f) = \{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$. Se f è ridotto, $[f] \mapsto V(f)$ è 1:1.

In generale, Nullstellensatz $\Rightarrow$ se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $[f] \mapsto V(f)$ è 1:1 per f ridotto.

Ipersuperfici proiettive

$0 \neq d \in \mathbb{N}$, ipersuperficie di grado d su $\mathbb{P}^n$

$[F]$, $0 \neq F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$, $F \sim G \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*$ t.c. $F = \lambda G$.

$\{\text{ipersuperfici di grado } d\} \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d)$ $\left(\begin{matrix}\text{per } d=1 \\ \text{è } (\mathbb{P}^n)^*\end{matrix}\right)$

Sistema lineare di ipersuperfici proiettive è $H \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d)$ sottospazio proiettivo ($H = \mathbb{P}(W)$, $W \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ sottospazio)

Es.: $(\mathbb{P}^2)^* = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_1)$, $P \in \mathbb{P}^2$ fissato.

$\{l \in (\mathbb{P}^2)^* \mid P \in l\}$? $P = [b_0, b_1, b_2]$, $l = [a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2]$.

$p \in l \Longleftrightarrow a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$, quindi ho un sistema lineare di $\dim = 1$.

H sistema lineare, $\dim H = 1$: fascio (pencil)

$\dim H = 2$: rete (net)

$V_d := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$. $\dim_{\mathbb{K}} V_d = \binom{n+d}{d}$, $\dim \mathbb{P}(V_d) = \binom{n+d}{d} - 1$.

$F \in V_d$, $F = \sum_{|I| = d} a_I x^I$ ($I = (i_0, \dots, i_n)$ multiindice, $|I| = i_0 + \ldots + i_n$, $x^I = x_0^{i_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$)

$[a_I]_{|I| = d}$ coordinate su $\mathbb{P}(V_d)$.

$F \in V_d \setminus \{0\}$, $F = c F_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot F_k^{m_k}$, F_i irr. distinti omogenei, $m_i > 0$

$[F] = m_1[F_1] + \ldots + m_k[F_k]$, $[F_i]$ componenti irr., m_i = molteplicità

$V(F) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0\}$.

$P \in \mathbb{P}^n$, $\{[F] \in \mathbb{P}(V_d) \mid P \in V(F)\}$ è un iperpiano di $\mathbb{P}(V_d)$.

In generale se fisso $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}^n$, $\{[F] \mid P_1, \dots, P_k \in [F]\}$ è un sistema lineare di $\operatorname{cod} \leq k$.

$[f]$ ipersuperficie di grado d di $\mathbb{A}^n$, chiusura proiettiva:

$\overline{[f]} = [H(f)]$ ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^n$.

Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, F ridotto: $\pi: \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$, $v \longmapsto [v]$

$\pi^{-1}(V_{\mathbb{P}^n}(F)) \cup \{0\} = V_{\mathbb{A}^{n+1}}(F)$

Allora $V_{\mathbb{P}^n}(F)$ determina $[F]$.

$F = H(f)$, $j_0: \mathbb{A}^n \to \mathbb{P}^n$, $j_0^{-1}(V(F)) = V(f)$.

$[f] \mapsto \overline{[f]}$ conserva componenti irr. e molteplicità. I punti di $V(F) \cap \{x_0 = 0\}$ sono i punti all'infinito.

Es.: $2x_1 + 3x_2 - 1 = f$, $2x_1 + 3x_2 - x_0 = F = H(f)$.

Punti all'infinito: $x_0 = 0$, $2x_1 + 3x_2 - x_0 = 0$, $[0, 3, -2]$.

quadrica affine ($\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$) $x^T A x + 2b^T x + c = f$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, A matrice $n \times n$ simmetrica, $b \in \mathbb{K}^n$, $c \in \mathbb{K}^n$.

$\overline{[f]} = x^T A x + 2x_0 b^T x + x_0^2$ è la chiusura proiettiva

$\left(\begin{array}{c|c} c & b^T \\ \hline b & A \end{array}\right)$ $x^T A x = 0$, $x_0 = 0$ sono i pti all'∞

Se $[F]$ è ipersuperficie proiettiva, la parte affine di $[F]$ è $[f]$ con $f = D(F)$.

$[f]$ ipersuperficie di $\mathbb{A}^n$, $p \in \mathbb{A}^n$, $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, $l = \{p + tv \mid t \in \mathbb{K}\}$.

Molteplicità di intersezione tra $[f]$ e l in p

$I([f] \cap l; p)$? $g(t) := f(p + tv)$.

Se $g(t) \equiv 0$, $l \subseteq V(f)$ e $I([f] \cap l; p) = +\infty$.

$g(t) \neq 0$: $I([f] \cap l; p)$ = molteplicità di $g(t)$ in $t = 0$.

Oss.: $I([f] \cap l; p) > 0 \Leftrightarrow p \in V(f)$.

Se $I([f] \cap l; p) > 1$ l è tangente a f in p, ciò $\Longleftrightarrow g(0) = 0, g'(0) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow f(p) = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i = 0$. Dato $p \in V(f)$, la retta $l = p + tv$ è tangente a $[f]$ in $p \Longleftrightarrow v \in \left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i = 0\right\} \subseteq \mathbb{K}^n$, lo spazio tangente a $[f]$ in p, $T_p[f]$.

Due casi ($p \in V(f)$): se $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \ \forall i$, $T_p[f] = \mathbb{K}^n$ e p è singolare per f;

se $\exists\, i$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$, $T_p[f]$ è un iperpiano e il punto è non singolare (liscio, semplice).

Curve piane: $[f]$, $f = f(x, y)$, il luogo singolare di $[f]$ è definito da

$\begin{cases} f = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$. Ex.: trovare i pti singolari di
- iperpiani
- $y^2 - p(x)$, p pol.
- coniche e quadriche