$[f]$ ipersuperficie di $\mathbb{A}^n$, $P \in V(f)$

$m_P(f) := \min\{ I([f] \cap \ell; P) \mid \ell \ni P \text{ retta} \}$

Oss.: $[f]$ è liscia in P se $m_P(f) = 1$.

Se $P = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ (posso dirlo WLOG con una traslazione),

$f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_d$ dove $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è omogeneo di grado i,

$m > 0$, $f_m \neq 0$. $\ell = \{ t v \mid t \in \mathbb{K} \}$, $\mathbb{K}^n \ni v \neq 0$.

$f(tv) = f_m(tv) + \dots + f_d(tv) = t^m f_m(v) + t^{m+1} g(t, v)$.

Se $f_m(v) \neq 0$, $I([f] \cap \ell; P) = m$, se $f_m(v) = 0$, $I([f]; \ell) > m$.

$f_m \neq 0 \Rightarrow \exists v$ t.c. $f_m(v) \neq 0 \Rightarrow m_P(f) = m$. Le rette t.c.

$I([f] \cap \ell; P) > m$ sono quelle contenute in $V(f_m)$, dette tangenti principali. $[f_m]$ è il cono tangente e coincide con il tangente se $m = 1$.

$n = 2$, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ $f_m(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{h} (\underbrace{a_i x_1 + b_i x_2}_{\ell_i})^{m_i}$, $[f_m] = m_1[\ell_1] + \dots + m_h[\ell_h]$,

$\sum m_i = m$.

Es.: $f = y^2 - p(x)$ $\mathbb{A}^2$, $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$

$\begin{cases} f = 0 \\ f_x = f_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2 - p(x) = 0 \\ p'(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ p(x) = p'(x) = 0 \end{cases}$

Punti singolari: $(\alpha, 0)$, α radice multipla di p. Molteplicità?

$p(x) = (x - \alpha)^k q(x)$, $k \geq 2$, $q(\alpha) \neq 0$.

$y^2 - p(x) = y^2 - (x - \alpha)^k q(x)$. Siano $u = y$, $v = x - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow g(u, v) = f(\alpha + v, u) = u^2 - v^k q_1(v)$, $q_1(0) \neq 0$

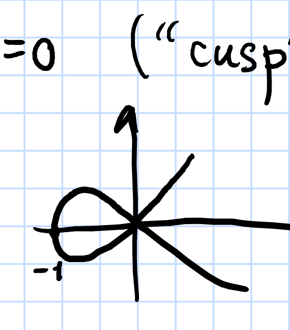
$= u^2 - c v^k + \dots$, $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \Rightarrow m_P(f) = 2$.

Se $k = 2$, il cono tangente è $(u - bv)(u + bv) = 0$, $b^2 = c$

punto doppio ordinario ("nodo").

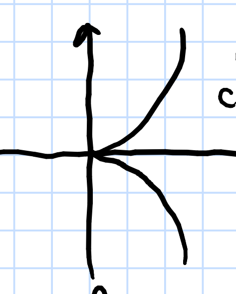
Se $k > 2$, " " " " $u^2 = 0$ ("cuspidi").

Es.: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $y^2 - x^2(x+1) = 0$



cubica annodata

$y^2 = x^3$



curva cuspidata

Es.: $f = x^T A x + 2 b^T x + c$ A matrice $n \times n$ simmetrica, $b \in \mathbb{K}^n$, $c \in \mathbb{K}$,

$\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ (per sempre).

$\begin{cases} x^T A x + 2 b^T x + c = 0 \\ A x + b = 0 \end{cases}$ Se $Ax + b = 0$ non ha sol., $[f]$ è liscia

es.: $x^2 - y$, $x^2 - 1$

Se $Ax + b = 0$ ha sol. $\bar{x}$, $\bar{x}$ è singolare $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{x}^T A \bar{x} + 2 b^T \bar{x} + c = 0$ es.: $x^2 - y^2 = 0$

coniche lisce su $\mathbb{R}$: $x^2 \pm y^2 + c = 0$, $c \neq 0$

$[F]$ ipersuperficie di $\mathbb{P}^n$, $\deg F = d$, $P \in V(F) \subseteq \mathbb{P}^n$

Si sceglie i t.c. $P \notin V(x_i)$ e si studia la parte affine di $F|_{V_i}$ ($V_i = \{x_i \neq 0\}$).

Es.: $y^2 - p(x) = 0$, $\deg p = d \geq 3$

Chiusura proiettiva: $[z, x, y]$ coordinate proiettive

$y^2 z^{d-2} - \underbrace{\tilde{p}(x, z)}_{= a x^d + \dots,\ a \neq 0}$ $\leftarrow$ omogeneo di grado d

Punti all'infinito: $\begin{cases} z = 0 \\ f = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ a x^d = 0 \end{cases}$ $[0, 0, 1] = Q$ unico pto all'infinito

Studio $[f]$ in Q. Coordinate affini: $y = 1$, $u = \frac{z}{y}$, $v = \frac{x}{y}$

$u^{d-2} - \tilde{p}(v, u)$ $\Rightarrow d = 3$ pto liscio, $d > 3$ pto singolare $m_Q = d - 2$

$\tilde{p}(v, u)$ $\rightarrow$ omogeneo di grado d

Cono tangente: $u^{d-2} = 0$

$d = 3$ $u - \tilde{p}(u, v)$ $I([f] \cap T_Q[f]; Q) = 3 > 2$ abbiamo un flesso, cioè un pto liscio in cui la tangente interseca la curva con molteplicità > 2.

$y^2 - (x^3 + ax + b) = f(x, y)$, $a, b \in \mathbb{K}$ (a meno di cambi di coordinate, porto $y^2 - p(x)$ in questa forma) $p(x) \rightarrow \deg = 3$

cerco condizioni per le radici multiple ($\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2, 3$)

$\begin{cases} x^3 + ax + b = 0 \\ 3x^2 + a = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2}{3} a x + b = 0, \ a \neq 0 \\ 3x^2 + a = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \frac{b}{a} \\ \frac{27}{4} \frac{b^2}{a^2} + a = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \frac{b}{a} \\ 27 b^2 + 4 a^3 = 0 \end{cases}$

$p(x) = x^3 + ax + b$ ha radici multiple $\Leftrightarrow \Delta = 27 b^2 + 4 a^3 = 0$

$[F]$ ipersuperficie di $\mathbb{P}^n$, $\deg F = d$, $P \in V(F) \cap U_0$ $\rightarrow$ WLOG,

$P = [1, a_1, \dots, a_n]$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $f = D(F)$.

Spazio tangente applicato: $H = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = 0 \right\}$

Teorema di Eulero: $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, \dots, x_n]_d \Rightarrow d F(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) x_i$.

$0 = d F(1, a) = \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, a) a_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, a) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, a) a_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) a_i$

Chiusura proiettiva: $\overline{H} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i x_0 = \frac{\partial F}{\partial x_0}(1, a) x_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(1, a) x_i =$

$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) x_i$ spazio tangente proiettivo a $[F]$.

$P \in \mathbb{P}^n$ è singolare per F se $F(P) = \frac{\partial F}{\partial x_0}(P) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) = 0$.

Se $\operatorname{char} \mathbb{K} \nmid d$ basta $\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$.

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $C = [F]$, $D = [G]$ curve di $\mathbb{P}^2$, $m = \deg F$, $n = \deg G$.

Si definisce $I(C \cap D; P)$ in modo tale che:

(1) se C o D è una retta, è la nozione che conosciamo già

(2) $I(C \cap D; P) > 0 \Leftrightarrow P \in C \cap D$

(3) $I(C \cap D; P) \geq m_P(C) \cdot m_P(D)$ e vale $= \Leftrightarrow$ C e D non hanno tangenti principali in P in comune

(in particolare, $I(C \cap D; P) = 1 \Leftrightarrow C$ e D lisce in P e $T_P C \neq T_P D$)

(4) $I(C \cap (D_1 + D_2); P) = I(C \cap D_1; P) + I(C \cap D_2; P)$.

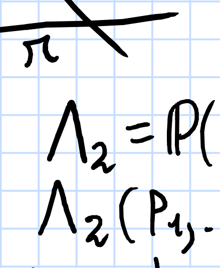
Teorema di Bézout: $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $C = [F]$, $D = [G]$ curve senza componenti comuni. Allora $\sum_{P \in C \cap D} I(C \cap D; P) = mn$.

Cor. (Bézout forma debole): stesse ipotesi, allora

(1) $C \cap D \neq \emptyset$ (2) $\# C \cap D \leq mn$.

Applicazione: $P_1, \dots, P_5 \in \mathbb{P}^2$ distinti, $\nexists$ retta che ne contiene 4.

Allora $\exists$ al più un'unica conica $C \ni P_1, \dots, P_5$. PA $\exists C \neq D$ due tali coniche, per Bézout $\exists$ r componente comune, che dev'essere una retta. $C = r + s$, $D = r + s'$, r, s, s' rette, $s \neq s'$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ almeno 4 pti su r, contro l'ipotesi.

Ma ce n'è almeno una?

$\Lambda_2 = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]_2)$, $\dim \Lambda_2 = 5$.

$\Lambda_2(P_1, \dots, P_k) := \{ C \in \Lambda_2 \mid P_1, \dots, P_k \in C \}$ è un sottosistema lineare. $\dim \Lambda_2(P_1, \dots, P_k) \geq 5 - k \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(P_1, \dots, P_5) \geq 0 \Rightarrow \exists$ conica per $P_1, \dots, P_5$.