Proiettività: $\mathbb{P}GL(n+1)$.

Una proiettività $g:\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ è un'applicazione del tipo $[v] \mapsto [Av]$, $A \in GL(n+1)$.

$\Lambda_{d,n} := \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d)$. Azione di $\mathbb{P}GL(n+1)$:

$[F] \in \Lambda_{d,n}$, $g = [A] \in \mathbb{P}GL(n+1)$.

$A^*F(y) = F(Ay)$ $\quad x = Ay$

$A^* : \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d \longrightarrow \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d$ è un automorfismo (l'inversa è $(A^{-1})^*$).

$g^* : \Lambda_{d,n} \to \Lambda_{d,n}$ è la proiettività associata ad A^*.

$(g \circ h)^* = h^* \circ g^*$, per avere un'azione definisco $g_* := (g^{-1})^*$, che è un azione di $\mathbb{P}GL(n+1)$ su $\Lambda_{d,n}$.

Verificare che è tutto invariante per questa azione.

Azione di $\mathbb{P}GL(n+1)$ su $\Lambda_{2,n}$

quadrica $Q = [F]$, $F = x^T M x$, M matrice $(n+1)\times(n+1)$ simmetrica

$g = [A]$, $\quad g^*Q \longleftrightarrow A^T M A$

M e A^TMA hanno lo stesso rango $= \mathrm{rk}\, Q$.

Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, l'unico invariante è il rango. Se $n=2$:

- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ non degenere (e irriducibile)
- $x_0^2 - x_1^2 = (x_0+x_1)(x_0-x_1)$ coppia di rette
- x_0^2 retta doppia.

$P_1,\dots,P_5 \in \mathbb{P}^2$, $C \ni P_1,\dots,P_5$ conica. C è irr. $\Leftrightarrow$ tre dei P_i sono allineati.

($\Rightarrow$) $C = l_1 + l_2$, l_1, l_2 rette $\Rightarrow l_1$ o l_2 contiene almeno tre P_i.

($\Leftarrow$) $P_1, P_2, P_3 \in r$ retta $\Rightarrow \#(C \cap r) \geq 3 \Rightarrow r$ è una componente di C.

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $C \in \Lambda_d$, $P \in C$ di molteplicità d.

Se $P = (1,0,0)$, cioè $P = (0,0) \in \mathbb{A}^2$, $C = [F]$, $f = D(F)$,

$\mathrm{mult}_P C = d \Rightarrow f$ è omogeneo di grado $d \Rightarrow$

$\Rightarrow f = \prod_{i=1}^{d} (a_i x + b_i y)$, $C = l_1 + \dots + l_d$, $P \in l_i$ rette.

C cubica irriducibile. Le singolarità sono pti doppi. Se $P_1 \neq P_2$ sono pti doppi e $r = \langle P_1, P_2 \rangle$ (sottospazio proiettivo generato [retta]), r interseca C con molteplicità $4 \Rightarrow r$ è componente di $C \Rightarrow C$ è riducibile.

$d=4$, C irr.. Se ha un pto triplo P, è l'unico pto singolare.

Ex.: trovare un esempio esplicito.

Se C ha pti doppi:

Es.: $\quad x_0^2x_1^2 + x_1^2x_2^2 + x_0^2x_2^2$ è una quartica irr. con tre pti doppi (ex.: verificarlo)

È possibile con quattro?

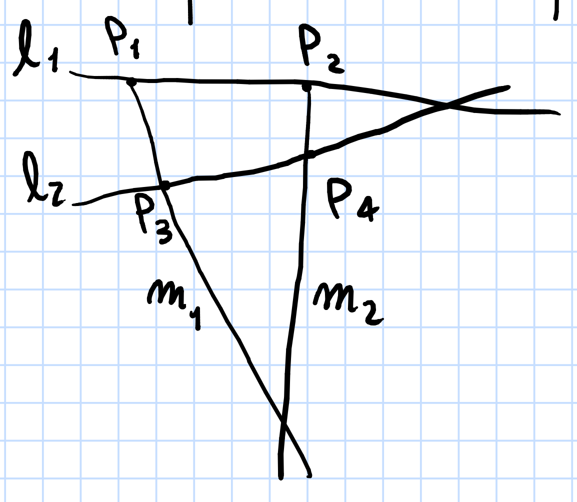
$P_1,\dots,P_4 \in \mathbb{P}^2$ distinti non tutti allineati.

$\dim \Lambda_2(P_1,\dots,P_4) = 1$, infatti sia $P_5 \in \mathbb{P}^2 \setminus \bigcup_{i<j} \langle P_i, P_j \rangle$;

$\dim \Lambda_2(P_1,\dots,P_5) = 0 \Rightarrow \dim \Lambda_2(P_1,\dots,P_4) \leq 1$, ma già sapevamo che $\dim \Lambda_2(P_1,\dots,P_4) \geq 1$.

sto intersecando con un iperpiano

Fascio di coniche per $P_1,\dots,P_4$ in posizione generale:



$l_1 + l_2$ e $m_1 + m_2$ generano $\Lambda_2(P_1,\dots,P_4)$.

Es.: $P_1 = [1,-1,3]$, $P_2 = [2,1,0]$, retta $\langle P_1, P_2 \rangle$ è

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

$l_i = [L_i]$, $m_i = [M_i]$, $i = 1,2$

$\Lambda_2(P_1,\dots,P_4) = \{ [\lambda L_1 L_2 + \mu M_1 M_2] \mid [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \}$.

Ex.: scrivere il fascio di coniche per i pti del riferimento standard.

C quartica, $P_1,\dots,P_4$ pti doppi.

Q conica per $P_1,\dots,P_4, P_5$ dove $P_5 \in C$ è distinto da $P_1,\dots,P_4$.

Q e C si intersecano in $\geq 2+2+2+2+1 = 9$ pti (contati con molteplicità) $\Rightarrow$

$\Rightarrow C$ e Q hanno una componente comune $\Rightarrow C$ è riducibile.

$[F], [G]$ ipersuperfici di $\mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$.

$V(F) \cap V(G)$ può essere $\emptyset$?

$n = 2$ no per Bézout.

$F_1 := F(x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0)$, $G_1 := G(x_0, x_1, x_2, 0, \dots, 0)$.

F_1 e G_1 hanno almeno una sol. comune $[a,b,c] = P \in \mathbb{P}^2$ per Bézout $\Rightarrow$

$\Rightarrow [a,b,c,0,\dots,0] \in V(F) \cap V(G)$.

$[F]$ ipersuperficie liscia di $\mathbb{P}^n \overset{(n\geq 2)}{\Longrightarrow} [F]$ è irriducibile. PA $F = GH$, allora per quanto appena visto $\exists P \in V(G) \cap V(H) \underset{\text{derivo}}{\Rightarrow} P$ è singolare per $[F]$.

$C = [F]$ curva piana, $P \in C$, $\deg C = d$.

Def.: P è un flesso se:
- è liscio per C
- $T_P C$ interseca C in P con molteplicità > 2.

Matrice Hessiana: $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j = 0,1,2}$ matrice simmetrica 3×3.

Le entrate sono pol. omogenei di grado $d-2$.

$\mathcal{H}(F) = \det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right)$. Due casi:

$$\mathcal{H}(F) = \begin{cases} 0 & \leftarrow \text{succede esattamente quando } F \text{ è unione di rette} \\ \text{pol. omogeneo di grado } 3(d-2) \end{cases}$$

Teo.: $P \in C$ liscio. P è un flesso $\Longleftrightarrow \mathcal{H}(F)(P) = 0$.

Dim.: poi. $\square$

$d = 1$: tutti i pti sono flessi.

$d = 2$: C irr. $\Rightarrow$ non ci sono flessi.

$d \geq 3$: C liscia $\Rightarrow \exists$ almeno un flesso.

Aspettativa (per Bézout): $3d(d-2)$ flessi.

Ex.: $\mathcal{H}(F)$ non dipende dalle coordinate.