Dim. (del teo. dell'altra volta): $f(x,y)=F(1,x,y)$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2F}{\partial x_0^2} & \frac{\partial^2F}{\partial x_0\partial x_1} & \frac{\partial^2F}{\partial x_0\partial x_2} \\ \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_0} & \ddots & \\ \frac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_0} & & \end{pmatrix}(1,x,y) = $$

teorema di Eulero + proprietà del det

$$= \det\begin{pmatrix} (d-1)\frac{\partial F}{\partial x_0} & // & // \\ (d-1)\frac{\partial F}{\partial x_1} & // & // \\ (d-1)\frac{\partial F}{\partial x_2} & // & // \end{pmatrix}(1,x,y) =$$

come sopra, stavolta con le righe

$$= \det\begin{pmatrix} (d-1)dF & (d-1)\frac{\partial F}{\partial x_1} & (d-1)\frac{\partial F}{\partial x_2} \\ (d-1)\frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial^2F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2F}{\partial x_1\partial x_2} \\ (d-1)\frac{\partial F}{\partial x_2} & \frac{\partial^2F}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}(1,x,y) =$$

WLOG $P=(1,x,y)\in C$

$$= (d-1)^2\det\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(x,y).$$

Scelgo coordinate t.c. $P=(0,0)$ e $T_PC=\{y=0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x,y)=y+y(ax+by)+cx^2+\dots$.
P flesso $\Leftrightarrow c=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}=ay+2cx+\dots$, $\frac{\partial F}{\partial y}=1+ax+2b+\dots$.
Allora $\mathcal{H}(F)(0,0)=\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2c & * \\ 1 & * & * \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow c=0 \Leftrightarrow P$ flesso. $\square$

Es.: $C: y^2=x^3+ax+b$ è liscia $\Leftrightarrow 4a^3+27b^2\neq 0$.

$p(x)=x^3+ax+b$ $\qquad y^2-p$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -p' & 2y \\ -p' & -p'' & 0 \\ 2y & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4y^2p''-2p'^2$$

$\begin{cases} y^2=p \\ 2y^2p''-p'^2=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=p \\ 2pp''=p'^2 \end{cases}$ $\qquad h(x)=2p(x)p''(x)-p'^2(x)$

$h'=2pp'''+2p'p''-2p'p''=6p$

Se $(h,h')\neq 1$, $(p,p')\neq 1 \Rightarrow p$ ha radici doppie, ma stiamo supponendo che la curva sia liscia, assurdo. Allora $(h,h')=1 \Rightarrow h$ ha radici distinte $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ che ci danno gli 8 flessi $(\alpha_i,\pm\beta_i)_{i=1,2,3,4}$ con $\beta_i^2=p(\alpha_i)$ (se $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$). Siccome c'è anche il flesso $[0,0,1]$, otteniamo 9 flessi.

Prop. (forma di Weierstrass): char $\mathbb{K}\neq 2,3$, C cubica liscia e irr., $P\in C$ flesso $\Rightarrow \exists$ coordinate su $\mathbb{P}^2$ t.c. $P=[0,0,1]$ e C ha equazione $y^2=x^3+ax+b$, $4a^3+27b^2\neq 0$.
Dim.: scelgo coordinate t.c. $P=[0,0,1]$, $T_P(C)=\{z=0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow C: z+z(ax+bz)+cx^3+zg_2(x,z)$. C irr. $\Rightarrow c\neq 0$.
Omogenizzo: $y^2z+yz(ax+bz)+cx^3+zg_2(x,z)$.
Pongo $z=1$: $y^2+y(ax+b)+cx^3+c_1x^2+c_2x+c_3$.

$y'=y+\frac{ax+b}{2}$, $x'=x$ $\qquad x'=x''-\alpha$

$(y')^2+c(x')^3+c_1'(x')^2+c_2'x'+c_3'$ $\qquad 3c\alpha=c_1'$

$x''=x'+\frac{c_1'}{3c}$, $y''=y'$

$(y'')^2+c(x'')^3+c_1''(x'')^2+c_2''x''+c_3''$

$y'''=\frac{y''}{c^2}$, $x'''=-\frac{x''}{c} \Rightarrow (y''')^2=(x''')^3+ax'''+b$.

Curva liscia $\Rightarrow 4a^3+27b^2\neq 0$. $\square$

Forma di Legendre

Se $x^3+ax+b=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$, $\alpha_i\in\mathbb{K}$ distinti, $\exists$ trasformazione affine $x\mapsto\lambda x+\mu$ t.c. $\alpha_1\mapsto 0$, $\alpha_2\mapsto 1$, $\alpha_3\mapsto\lambda\neq 0,1$. In queste coordinate $y^2=cx(x-1)(x-\lambda)$.
Cambio ancora ($y=c^2y'$, $x=cx'$) e ottengo una cosa del tipo $y^2=x(x-\mu)(x-\lambda)$, $0\neq\lambda\neq\mu\neq 0$. Le rette passanti per $[0,0,1]$ e tangenti a C in qualche pto? $z=0$ è una. Se $Q\in C$, $Q=[1,a,b]$, quando $[0,0,1]\in T_QC$? Se e solo se $\frac{\partial f}{\partial y}(Q)=0 \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (0,0),(\mu,0),(\lambda,0)$. Le rette cercate sono dunque $z=0$, $x=0$, $x=\mu z$, $x=\lambda z$.
Oss.: se $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$, usando $y=\sqrt{c}y'$ si può porre $\mu=1$.

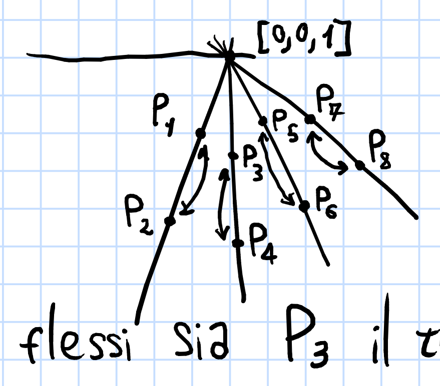
Se $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$, char $\mathbb{K}\neq 2,3$, C cubica liscia.
1) C ha esattamente 9 flessi distinti (segue da quanto visto)
2) $P_1,P_2\in C$ flessi, $P_1\neq P_2 \Rightarrow L(P_1,P_2)\cap C=\{P_1,P_2,P_3\}$, P_3 flesso $\neq P_1,P_2$.
($L(P_1,P_2)$: retta per P_1 e P_2)
Dim. (di 2)): metto C in forma di Weierstrass con $P_1=[0,0,1]$.
$P_2=[1,\alpha,\beta] \Rightarrow P_3=[1,\alpha,-\beta]$. $L(P_1,P_2)=\{x=\alpha z\}$. $\square$
Si verifica che i flessi $P_1,\dots,P_9$ e le 12 rette che li congiungono formano una configurazione isomorfa al piano affine su $\mathbb{F}_3$.

Es.: $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $C: x^3+y^3+z^3$

$$\mathcal{H}(F)=\det\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}=xyz \qquad \omega=e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$[1,-1,0]$, $[1,\omega,0]$, $[1,\overline{\omega},0]$
$[1,0,-1]$ $[1,0,\omega]$ $[1,0,\overline{\omega}]$
$[0,1,-1]$ $[0,1,\omega]$ $[0,1,\overline{\omega}]$

3) $G=\{g\in PGL(3) \mid gC=C\}$. G agisce transitivamente sui flessi.
Dim. (di 3)): se $C: y^2=x^3+ax+b$, $(x,y)\mapsto(x,-y)$ è un automorfismo.



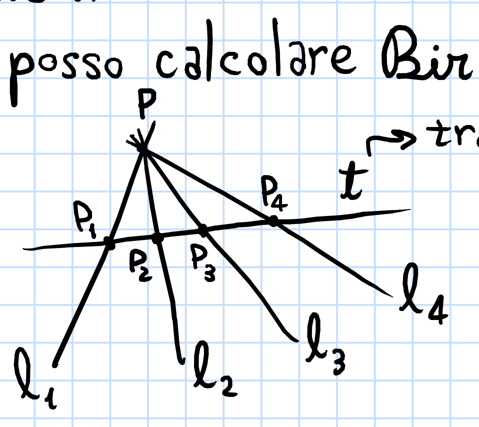
Dati P_1,P_2 flessi sia P_3 il terzo flesso su $L(P_1,P_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists g\in G$ t.c. $gP_3=P_3$, $gP_1=P_2$, $gP_2=P_1$. $\square$

Birapporto
$P_1,P_2,P_3,P_4\in\mathbb{P}^1$ distinti. $z=x_1/x_0$ coordinata affine ($z=\infty$ se $x_0=0$).
$\exists!$ sistema di coordinate omogenee t.c. $P_1\leftrightarrow\infty=[0,1]$
$P_2\leftrightarrow 0$
$P_3\leftrightarrow 1$

$\mathrm{Bir}(P_1,P_2,P_3,P_4)=$ coordinata affine di P_4 in tale sistema.
z_i coordinata affine di P_i,
$$\mathrm{Bir}(P_1,P_2,P_3,P_4)=\frac{z_4-z_2}{z_4-z_1}\cdot\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

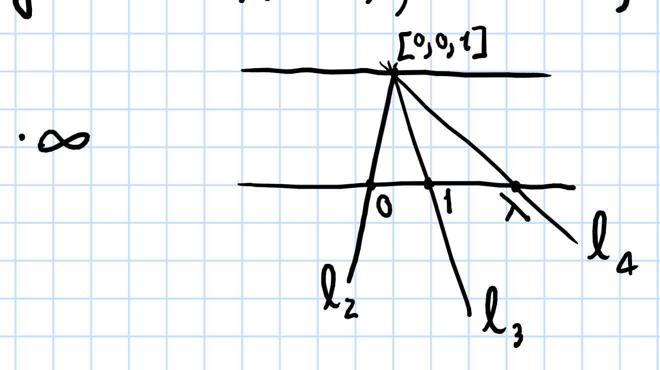
(a) Bir non dipende dalle coordinate in cui lo calcolo
(b) $\mathrm{Bir}(P_1,P_2,P_3,P_4)=\mathrm{Bir}(Q_1,Q_2,Q_3,Q_4) \Leftrightarrow \exists g\in PGL(2)$ t.c. $gP_i=Q_i$, $i=1,2,3,4$.

$P\in\mathbb{P}^2$, il fascio $\mathcal{F}$ di rette di centro P è una retta proiettiva.
$l_1,l_2,l_3,l_4\in\mathcal{F}$ distinte, posso calcolare $\mathrm{Bir}(l_1,l_2,l_3,l_4)$.
Interpretazione:



$\mathrm{Bir}(l_1,l_3,l_4)=\mathrm{Bir}(P_1,P_2,P_3,P_4)$.

$y^2=x(x-1)(x-\lambda)$, $l_1: z=0$, $l_2: x=0$, $l_3: x=z$, $l_4: x=\lambda z$.



$\lambda=\mathrm{Bir}(l_1,l_2,l_3,l_4)$.