Voglio un invariante per le quaterne non ordinate.

$\exists\, g \in \mathbb{P}GL(2)$ t.c. $g\{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} \iff$

$\iff \exists\, \sigma \in S_4$ t.c. $\mathrm{Bir}(P_1, \dots, P_4) = \mathrm{Bir}(Q_{\sigma(1)}, \dots, Q_{\sigma(4)})$.

Sia $\sigma \in S_4$, $\lambda = \mathrm{Bir}(Q_1, \dots, Q_4)$. È immediato verificare che $(12)(34)$, $(13)(24)$, $(14)(32)$ agiscono banalmente $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ al variare di σ ho al più $|S_4|/4 = 6$ valori per il birapporto.

Considero $\infty, 0, 1, \lambda$.

$$\begin{array}{ll} (1,2) & \lambda \mapsto 1/\lambda \\ (2,3) & \lambda \mapsto 1-\lambda \end{array}$$

Queste generano, quindi ho

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{1}{1-\lambda}, 1-\lambda.$$

Sono distinti tranne che se:
- $\lambda = -1, 2, 1/2$
- ω_1, ω_2 radici di $\lambda^2 - \lambda + 1$.

Allora dati $\lambda = \mathrm{Bir}(P_1, \dots, P_4)$, $\mu = \mathrm{Bir}(P_1, \dots, P_4)$

$\exists\, g$ t.c. $g\{P_1, \dots, P_4\} = \{Q_1, \dots, Q_4\} \iff$

$\iff \mu \in \left\{\lambda, 1/\lambda, \frac{\lambda-1}{\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{1}{1-\lambda}, 1-\lambda\right\}$ (*).

$$j : \mathbb{K} \setminus \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$t \longmapsto \frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}.$$

Prop.: (*) $\iff j(\lambda) = j(\mu)$.

Dim.: $(\Rightarrow)$ $j(1/t) = j(t) = j(1-t) \Rightarrow j$ cost. su $\{\lambda, \dots, 1-\lambda\}$.

$(\Leftarrow)$ $\beta := j(\lambda) = j(\mu)$. $j(t) = \beta \iff \underbrace{(t^2-t+1)^3 - \beta t^2(t-1)^2}_{\text{monico di grado 6, } p_\beta(t)} = 0$

Se λ non è un valore speciale, $\lambda, \dots, 1-\lambda$ sono radici distinte di $p_\beta \Rightarrow$ sono tutte le radici, quindi μ è uno di questi.

Se $\underset{\beta = 27/4}{\lambda = -1, 2, 1/2}$ o $\underset{\beta = 0}{\lambda = \omega_1, \omega_2}$ si fa a mano. $\square$

"Classificare" le curve piane di grado d a meno dell'azione di $PGL(3)$.

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

$d = 1$: una sola orbita.

$d = 2$: classificate dal rango: $\begin{array}{l} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 \\ x_0^2 + x_1^2 \\ x_0^2 \end{array}$.

C cubica liscia, considero la forma di Legendre: $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$.

Definisco un "modulo" di C $j(C) := j(\lambda)$.

$j(\lambda)$ = modulo (nel senso del birapporto) della quaterna di rette tangenti a C e passanti per $O = [0,0,1]$. Se $O' \in C$ è un altro flesso, $\exists\, g \in \mathbb{P}GL(3)$ t.c. $gC = C$, $gO = O' \Rightarrow$ il modulo delle tangenti a C per O è lo stesso che quello delle tangenti passanti per O'. Conclusione: $j(C)$ è ben definito ed è un invariante proiettivo di C.

Teo.: j induce una bigezione $\left\{\begin{array}{c} C \text{ cubica} \\ \text{piana liscia} \end{array}\right\} / \mathbb{P}GL(3) \longrightarrow \mathbb{K}$.

Dim.: sia $\beta \in \mathbb{K}$, abbiamo visto che $\exists\, \lambda \neq 0, 1$ t.c.

$j(\lambda) = \beta = j(C_\lambda)$, $C_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \Rightarrow$ suriettività.

Iniettività: sia $j(C_1) = j(C_2) = j(\lambda) \Rightarrow C_1$ e C_2 sono proiettivamente isomorfe a C_λ. $\square$

C cubica liscia irr., $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2, 3$.

$A, B \in C$, $A \neq B$, $\ell = L(A,B)$. $\ell \cap C = A + B + D$, $D \in C$.

$C = [F]$, $A = [v]$, $B = [w]$.

$\underset{\mathbb{K}[s,t]_3}{F(sv+tw)} = st(as+bt)$, $D = [bv - aw]$.

Applicazione "3° pto":

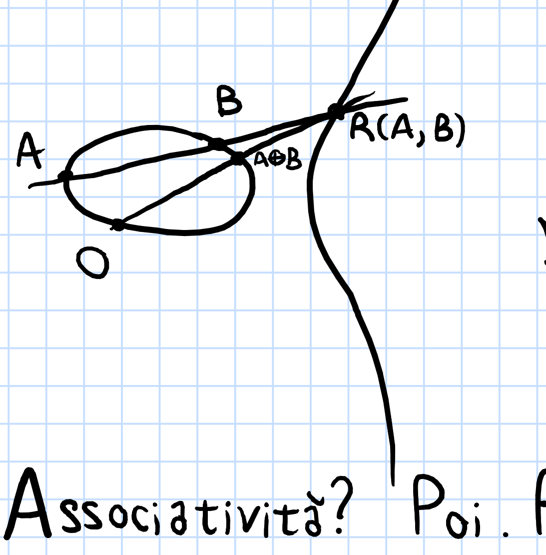
$$R : C \times C \longrightarrow C$$
$$(A,B) \longmapsto \text{"3° pto" di } L(A,B) \cap C$$

(se $A = B$, prendo $L(A,A) = T_A C$)

Definisco una legge di gruppo su C.

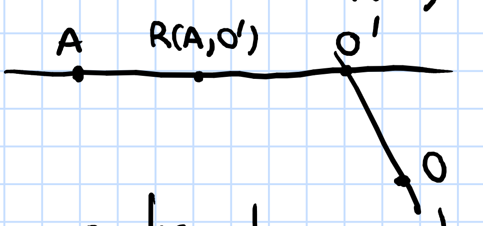
$O \in C$ fissato. $A, B \in C$

$O' = R(O,O)$ $\qquad A \oplus B = R(O, R(A,B))$.



Vale:
- $O \oplus A = A \;\forall A \in C$
- $A \oplus B = B \oplus A$

Definisco $-A := R(A, O')$.

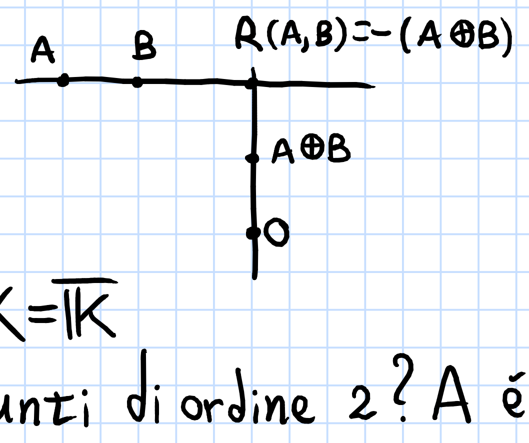


funziona

Associatività? Poi. Per ora diamola per buona.

Sia O un flesso, cioè $O = O'$. $A, B, D \in C$,

$A \oplus B \oplus D = 0 \iff D = -(A \oplus B) = R(A,B) \iff A, B, D$ allineati in $\mathbb{P}^2$.



$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$

Punti di ordine 2? A è di ordine 2 se $A \oplus A \oplus O = 0$, cioè se A, A, O sono allineati $\iff O \in T_A C$. Ho 3 pti di ordine 2 $\Rightarrow C[2] \cong \mathbb{Z}_2^2$.

Punti di ordine 3? $A \oplus A \oplus A = 0 \iff A, A, A$ allineati $\iff$

$\iff A$ è un flesso. $C[3] \cong \mathbb{Z}_3^2$.

Prop.: $P_1, \dots, P_8 \in \mathbb{P}^2$ distinti,
- non quattro su una retta
- non sette su una conica.

Allora $P_1, \dots, P_8$ impongono condizioni indipendenti alle cubiche.

$$H_3 = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_3]_2),\ \dim H_3 = \binom{3+2}{2} - 1 = 9.$$

Condizioni indi. $\iff \dim H_3(P_1, \dots, P_8) = 1$.

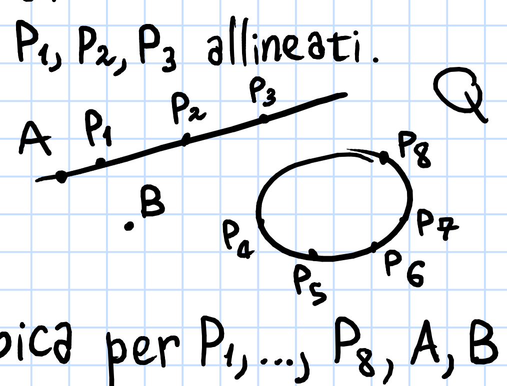
Dim.: PA $\dim H_3(P_1, \dots, P_8) \geq 2$.

Cioè posso assegnare due pti a piacere.

Caso 1: non 6 su conica, non 3 su retta

$\underset{\text{irr.}}{Q}$ = conica per $P_1, \dots, P_5$, prendo $A, B \in Q$ e considero C cubica per $P_1, \dots, P_8, A, B$. $\# C \cap Q \geq 7 \underset{\text{Bézout} + Q \text{ irr.}}{\Rightarrow} C = Q + \ell$, ma $P_6, P_7, P_8 \notin Q \Rightarrow \in \ell$, assurdo.

Caso 2: P_1, P_2, P_3 allineati.

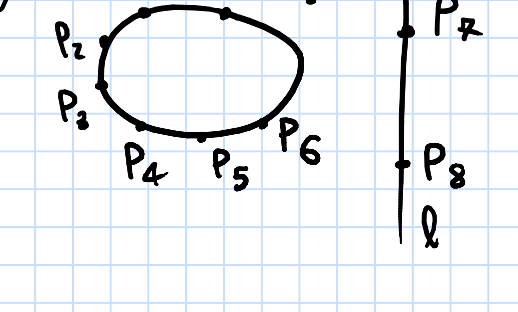


Q conica per $P_4, \dots, P_8$

C cubica per $P_1, \dots, P_8, A, B$. $\# \ell \cap C \geq 4 \Rightarrow C = \ell + Q'$,

$\underset{\substack{\text{altrimenti} \\ \text{ne avrei 4 allineati}}}{Q' \supseteq \{P_4, \dots, P_8\}} \underset{\substack{\text{dalle ipotesi su} \\ P_4, \dots, P_8 \text{ c'è una} \\ \text{sola } Q \text{ siffatta}}}{\Longrightarrow} Q = Q' \Rightarrow B \notin C$, assurdo.

Caso 3: $P_1, \dots, P_8$ in posizione generale. $P_1, \dots, P_6 \in Q$ conica (non degenere).



Considero $C \ni P_1, \dots, P_8, A, B$ cubica.

$C = Q + \ell' \Rightarrow P_7, P_8 \in \ell' \Rightarrow \ell' = \ell \Rightarrow$

$\Rightarrow B \notin C$, assurdo. $\square$