Cor. (della prop. della volta scorsa): C_1, C_2 cubiche piane, $C_1 \cap C_2 = \{P_1, \dots, P_9\}$ (P_i distinti). Sia $C \ni P_1, \dots, P_8$ cubica, allora $C \ni P_9$.

Dim.: $C_1 = [F_1]$, $C_2 = [F_2]$. $\underset{H_3(P_1,\dots,P_8)}{\underset{\cap}{\langle C_1, C_2 \rangle}} = \{[\lambda F_1 + \mu F_2] \mid [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1\}$

D'altra parte, $P_1, \dots, P_8$ verificano le ipotesi della prop. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \dim H_3(P_1, \dots, P_8) = 1 \Rightarrow \langle C_1, C_2 \rangle = H_3(P_1, \dots, P_8) \Rightarrow$
$\Rightarrow C \in \langle C_1, C_2 \rangle \Rightarrow P_9 \in C$. □

X cubica piana liscia (e irr.), $O \in X$ fissato (origine).
Legge di gruppo: $A, B \in X$, $R(A,B) =$ "3° pto" di $L(A,B) \cap X$,
$A \oplus B = R(O, R(A,B))$.
$A, B, C \in X$, vogliamo $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

retta $L_1 \ni A, B, R (= R(A,B))$;
retta $L_2 \ni R, O, S (= A \oplus B)$;
retta $L_3 \ni S, C, T (= R(S,C))$. Mi basta capire chi è T.
Ripeto:
$M_1 \ni B, C, R'$;
$M_2 \ni R', O, S'$;
$M_3 \ni S', A, T'$. Voglio $T = T'$.

Ipotesi supplementare: gli unici pti che possono coincidere tra quelli che ho costruito sono T e T'.
$C_1 = L_1 + M_2 + L_3$,
$C_2 = M_1 + L_2 + M_3$. Osservo che $X \cap C_1 \overset{X \text{ non ha componenti comuni con } C_1}{=} \{A, B, C, O, R, R', S, S', T\}$
e $X \cap C_2 \underset{\text{come per } C_1}{=} \{A, B, C, O, R, R', S, S', T'\}$.
Cor. $\Rightarrow C_2 \ni T \Rightarrow T = T'$.

Def.: A anello commutativo con unità è noetheriano se valgono le seguenti condizioni equivalenti:
(1) $I \subseteq A$ ideale è finitamente generato;
(2) ogni catena ascendente di ideali è stazionaria:
$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$, $\exists \bar{n}$ t.c. $I_n = I_{\bar{n}}$ $\forall n \geq \bar{n}$.

Teo. (delle basi di Hilbert): $\mathbb{K}$ campo $\Rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ noetheriano.

Topologia di Zariski su $\mathbb{A}^n$, $\#\mathbb{K} = +\infty$
$S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $V(S) = \{P \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = 0\ \forall f \in S\}$ insieme algebrico
Gli insiemi algebrici sono i chiusi di una topologia $\mathcal{Z}$ (detta di Zariski).
Oss.: (1) $I =$ ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ generato da S, $V(S) = V(I)$
(2) dato $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(P) = 0\ \forall P \in X\}$.
$X \subseteq V(I(X))$ e vale $= \Leftrightarrow X$ è algebrico.
Dim.: $X = V(I(X)) \Rightarrow X$ algebrico per def..
X alg. $\Rightarrow \exists I$ t.c. $X = V(I) \Rightarrow I \subseteq I(X) \Rightarrow X = V(I) \supseteq V(I(X))$. □

(a) $\emptyset = V(1)$, $\mathbb{A}^n = V(0)$
(b) $X = V(I)$, $Y = V(J)$, I, J ideali $\Rightarrow X \cup Y = V(I \cdot J)$
(c) $\{X_j\}_{j \in J}$, $X_j = V(I_j)$, I_j ideale $\Rightarrow \bigcap_{j \in J} X_j = V(\sum_{j \in J} I_j)$.
$X = V(I)$, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ noetheriano $\Rightarrow I = (f_1, \dots, f_m) \Rightarrow$
$\Rightarrow X = V(f_1, \dots, f_m)$.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ la top. di Z. è meno fine dell'euclidea (i chiusi di $\mathcal{Z}$ hanno parte interna vuota [ex.]).
- chiusi propri di $\mathbb{A}^1$: insiemi finiti.
- chiusi di $\mathbb{A}^2$: $V(f)$, $f \in \mathbb{K}[x, y]$, punti e unioni finite di questi.
- $\mathcal{Z}$ è T_1: $P \neq Q \in \mathbb{A}^n$, $P = (a_1, \dots, a_n)$, $Q = (b_1, \dots, b_n)$, WLOG $a_1 \neq b_1$. $\mathbb{A}^n - \{x_1 - a_1 = 0\} = U$, $\mathbb{A}^n - \{x_1 - b_1 = 0\} = V$ sono aperti, $P \in V \setminus U$, $Q \in U \setminus V$.
- $\mathcal{Z}$ non è T2: $P \neq Q \in \mathbb{A}^n$ si possono separare con aperti U e $V \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ chiusi propri Z, W t.c. $P \in Z$, $Q \in W$ e $Z \cup W = \mathbb{A}^n$.

Posso supporre $Z = V(f)$, $W = V(g)$, $f, g \neq 0$.
$\mathbb{A}^n = Z \cup W = V(fg) \underset{\#\mathbb{K} = +\infty}{\Longrightarrow} fg = 0$ in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow$
$\Rightarrow f = 0$ o $g = 0$, assurdo.

Def.: X s.t. si dice noetheriano se $\forall$ catena di chiusi
$Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ $\exists \bar{n}$ t.c. $Z_n = Z_{\bar{n}}$ $\forall n \geq \bar{n}$.
$\mathcal{Z}$ è noeth.: sia $Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$ catena di chiusi $\Rightarrow$
$\Rightarrow I(Z_1) \subseteq I(Z_2) \subseteq \dots I(Z_n) \subseteq \dots$ è catena di ideali, $\mathbb{K}[x]$ noeth. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \bar{n}$ t.c. $I(Z_n) = I(Z_{\bar{n}})$ $\forall n \geq \bar{n} \Rightarrow Z_n = V(I(Z_n)) = V(I(Z_{\bar{n}})) = Z_{\bar{n}}$ $\forall n \geq \bar{n}$.
Oss.: X s.t. noeth., $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ noeth..
Def.: X s.t., $Y \subseteq X$ chiuso. Y è irr. se $\forall$ scrittura $Y = Z_1 \cup Z_2$, Z_1, Z_2 chiusi ho $Y = Z_1$ o $Y = Z_2$.
Es.: $\mathbb{A}^n$ è irr..
Prop.: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso, è irr. $\Leftrightarrow I(X)$ è primo.
Dim.: X rid.: $X = Y \cup Z$, Y, Z chiusi propri di X.
$Y \subsetneq X \Rightarrow \exists f \in I(Y) \setminus I(X)$
$Z \subsetneq X \Rightarrow \exists g \in I(Z) \setminus I(X)$
$fg \in I(Y \cup Z) = I(X) \Rightarrow I(X)$ non è primo.
$I(X)$ non primo: $\exists f, g \notin I(X)$ t.c. $fg \in I(X)$.
$X \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g) \Rightarrow X = \underbrace{(X \cap V(f)) \cup (X \cap V(g))}_{\text{sono chiusi propri di } X} \Rightarrow$
$\Rightarrow X$ rid.. □

X s.t. noeth., $Z \subseteq X$ chiuso.
Teo.: (1) $\exists Z_1, \dots, Z_m$ chiusi irr. t.c. $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_m$;
(2) se $Z_i \not\subseteq Z_j$ $\forall i \neq j$, tale decomposizione è unica a meno dell'ordine. $\to$ decomposizione minimale
Dim.: (1) PA $\exists Z$ che non ha decomposizione.
$S = \{Z \subseteq X \text{ chiuso} \mid Z \text{ non ha decomposizione}\}$, lo ordino per $\supseteq$.
Si applica Zorn perché X è noeth.. Ho $Z \in S$ minimale, Z è riducibile $\Rightarrow Z = Z_1 \cup Z_2$, Z_1, Z_2 chiusi $\subsetneq Z \Rightarrow$
$\Rightarrow Z_1, Z_2 \notin S$ per minimalità di $Z \Rightarrow Z = Z_1 \cup Z_2$ ha decomposizione, assurdo.
(2) siano $X_1 \cup \dots \cup X_m = Y_1 \cup \dots \cup Y_s$ decomposizioni minimali.
$X_1 = (X_1 \cap Y_1) \cup \dots \cup (X_1 \cap Y_s) \underset{X_1 \text{ irr.}}{\Longrightarrow} \exists j_1$ t.c. $X_1 \subseteq Y_{j_1}$.
Analogamente, $Y_{j_1} \subseteq X_{k_1}$.
Per minimalità della decomposizione, $X_1 = X_{k_1} \Rightarrow X_1 = Y_{j_1}$.
Dunque ho $X_1 = Y_{j_1}$, $X_2 = Y_{j_2}$, $\dots$, $X_m = Y_{j_m}$.
Oss.: $j_1, \dots, j_m$ distinti $\Rightarrow m \leq s$.
Analogamente $s \leq m \Rightarrow s = m$, $X_i = Y_{j_i}$. □

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso, $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ decomposizione minimale.
$\underset{\text{radicale}}{I(X)} = I(X_1) \cap \dots \cap \underset{\text{primi}}{I(X_k)}$.