$\mathbb{K}$ campo, $\#\mathbb{K}=+\infty$

Topologia di Zariski su $\mathbb{P}^n$

$X\subseteq\mathbb{P}^n$ è chiuso se $X=V(F_i, i\in I)$, $F_i\in\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ omogenei.

Es.: – ipersuperfici

– $P=[a_0,\dots,a_n]\in\mathbb{P}^n$

$$P=\left\{ \operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_n \\ a_0 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\leq 1\right\}$$

– sottospazi proiettivi

$\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]=\bigoplus_{d\geq 0}\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d$ anello graduato

$f=\sum_{d\geq 0} f_d$, f_d

$I\subseteq\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ ideale, $I_d:=I\cap\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d$.

I è omogeneo $\overset{\text{def.}}{\iff} I=\bigoplus_{d\geq 0} I_d$, cioè $f\in I\iff f_d\in I\ \forall d\geq 0$.

Ex.: I è omogeneo $\iff$ è generato da pol. omogenei.

$X\subseteq\mathbb{A}^{n+1}$ è un cono se $\forall v\in X\ \lambda v\in X\ \forall\lambda\in\mathbb{K}$.

Cono algebrico: insieme algebrico che è un cono.

Prop.: X algebrico. X cono $\iff I(X)$ ideale omogeneo.

Dim.: ($\Leftarrow$) Oss.: 1) f omogeneo $\Rightarrow V(f)$ cono

2) $\cap$ di coni è cono

$I(X)=(F_i, i\in I)$, F_i omogenei

$X=V(I(X))=\cap V(F_i)$ è un cono.

($\Rightarrow$) $f\in I(X)$, $f=\sum_{d\geq 0} f_d$. Sia $v\in X$, WLOG $0\neq v$.

$0=f(\lambda v)=\sum_{d\geq v}\lambda^d f_d(v)\quad\forall\lambda\in\mathbb{K}\overset{\#\mathbb{K}=+\infty}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow f_d(v)=0\ \forall d\geq 0\Rightarrow f_d\in I(X)\ \forall d\geq 0$. □

$$\pi:\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{P}^n$$
$$(v)\longmapsto[v]$$

$X\subseteq\mathbb{P}^n$, $\mathcal{C}X:=\pi^{-1}(X)\cup\{0\}\subseteq\mathbb{A}^{n+1}$ è il cono su X.

$X\subseteq\mathbb{P}^n$ è chiuso $\iff\mathcal{C}X$ è un cono algebrico, cioè $\mathbb{P}^n$ ha la topologia quoziente della topologia di Zariski su $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$.

$X\subseteq\mathbb{P}^n$ chiuso, definisco $I_{\mathbb{P}}(X)\subseteq\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$ come $I(\mathcal{C}X)$.

$I_{\mathbb{P}}(X)$ è un ideale omogeneo.

Dato I ideale omogeneo, $V(I)$ è un cono. Definisco $V_{\mathbb{P}}(I)=\pi(V(I)\setminus\{0\})$ e se $Y\subseteq\mathbb{P}^n$ è chiuso, allora $Y=V_{\mathbb{P}}(I_{\mathbb{P}}(Y))$.

Oss.: la top. di Z. su $\mathbb{P}^n$ è noetheriana (segue da $\mathbb{A}^{n+1}$ noeth.).

Considero $j:\mathbb{A}^n\hookrightarrow\mathbb{P}^n$
$(y_1,\dots,y_n)\longmapsto[1,y_1,\dots,y_n]$

voglio le preimmagini chiuse

- j è continua; basta controllare le ipersuperfici. Sia $V(F)\subseteq\mathbb{P}^n$, F omogeneo. $j^{-1}(V(F))=V(f)$, $f=DF$
- sia $X\subseteq\mathbb{A}^n$ chiuso, $\overline{X}=$ chiusura in $\mathbb{P}^n$. Se $X=V(f_1,\dots,f_m)$, $Y=V(F_1,\dots,F_m)$, $F_i=H(f_i)$ è un chiuso di $\mathbb{P}^n$ e $Y\cap\mathbb{A}^n=X\Rightarrow X$ è chiuso nella top. indotta su $\mathbb{A}^n$ da $\mathbb{P}^n\Rightarrow$ $\Rightarrow$ la top. indotta su $\mathbb{A}^n$ da j è la top. di Z..

Attenzione: $Y\supseteq\overline{X}$, ma può non coincidere. Ex.: $\overline{X}=V(H(f), f\in I(X))$.

Es.: $\psi:\mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^3$
$t\mapsto(t,t^2,t^3)$
. $\mathrm{Im}\,\psi=\{y-x^2=z-yx=0\}=X$.

Omogeneizzo: $[t,x,y,z]$, $\{ty-x^2=tz-yx=0\}=Y\supseteq\{t=x=0\}$.

Oss.: $xz-y^2\in I(X)$. $\overline{X}\subseteq\{xz-y^2=0\}$,

$\{xz-y^2=0\}\cap\{t=x=0\}=\{[0,0,0,1]\}\Rightarrow Y\supsetneq\overline{X}$.

Sia $X\subseteq\mathbb{P}^n$ chiuso. X rid., $X=X_1\cup X_2$, $X_i\subsetneq X$ chiusi $\Rightarrow$ $\Rightarrow\mathcal{C}X=\mathcal{C}X_1\cup\mathcal{C}X_2\Rightarrow\mathcal{C}X$ rid..

Viceversa sia $\mathcal{C}X$ riducibile $\Rightarrow I(\mathcal{C}X)$ non è primo.

Lemma: I ideale omogeneo, I non è primo $\iff\exists f,g$ omogenei t.c. $f,g\notin I$, $fg\in I$.

Dim.: ($\Leftarrow$) ovvia.

($\Rightarrow$) Siano $F,G\notin I$ t.c. $FG\in I$. Scrivo $F=\sum_i F_i$, $G=\sum G_j$, F_i omogenei di grado i e G_j omogeneo di grado j.

$i_0=\min\{i\mid F_i\notin I\}$, $j_0=\min\{j\mid G_j\notin I\}$.

$$[FG]_{i_0+j_0}=F_{i_0}G_{j_0}+\sum_{\substack{i\neq i_0,\\ j\neq j_0,\\ i+j=i_0+j_0}}F_iG_j\in I\quad\Rightarrow F_{i_0}G_{j_0}\in I.\ \square$$

I omogeneo, $\cap$ I

Per il lemma, $\exists F,G\notin I(\mathcal{C}X)$ omogenei t.c. $FG\in I(\mathcal{C}X)$.

$$\mathcal{C}X=(\underbrace{\mathcal{C}X\cap V(F)}_{Y_1})\cup(\underbrace{\mathcal{C}X\cap V(G)}_{Y_2})\Rightarrow X=\pi(Y_1)\cup\pi(Y_2)\Rightarrow X\text{ rid..}$$

coni

Def.: una <u>varietà quasi-proiettiva</u> è un sottoinsieme $X\cap U\subseteq\mathbb{P}^n$ con X chiuso e U aperto.

Es.: • $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{A}^n$ ($\cong U_0=\{x_0\neq 0\}$)

• i chiusi di $\mathbb{A}^n$

• i chiusi di $\mathbb{P}^n$ (varietà proiettive)

Sulle varietà q.-proiettive consideriamo la top. indotta da $\mathbb{P}^n$.

Sono spazi noeth. $\Rightarrow$ si decompongono in irr..

$X\subseteq\mathbb{A}^n$, $f\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$. $X_f=X\setminus V(f)$ aperto di X è "aperto principale" (fondamentale, standard).

Prop.: gli aperti fondamentali sono una base della top. di Z. di X.

Dim.: $U\subseteq X$ aperto, $Z=X\setminus U$ è chiuso in $\mathbb{A}^n$, $I(Z)=(g_1,\dots,g_m)\Rightarrow U=X_{g_1}\cup\dots\cup X_{g_m}$. □

Prop.: X varietà q.-p. $\Rightarrow X$ è quasi cpt.

Dim.: caso X quasi affine, cioè $X=Y\setminus Z\subseteq\mathbb{A}^n$, Y,Z chiusi di $\mathbb{A}^n$. $\{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di X. Gli U_i sono aperti di $Y\Rightarrow$ $\Rightarrow$ posso supporre $U_i=Y_{g_i}$ aperti principali.

$J=(g_i, i\in I)$, $V(J)\cap X=\emptyset$. Posso trovare indici $i_1,\dots,i_m$ t.c. $J=(g_{i_1},\dots,g_{i_m})$ (uso noetherianità) $\Rightarrow U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}=X$.

Caso generale:

$X\overset{\circ}{=}Y\cap V\subseteq\mathbb{P}^n$ (Y chiuso, V aperto). $X_i:=X\cap\{x_i\neq 0\}\subseteq U_i\cong\mathbb{A}^n$.

$X_i=Y_i\cap V_i$ è quasi affine $\Rightarrow$ quasi cpt

$X=X_0\cup X_1\cup\dots\cup X_n$ è quasi cpt in quanto unione finita di quasi cpt. □

$$V(I)\longleftarrow\!\shortmid\ I$$
$$\{X\subseteq\mathbb{A}^n\mid X\text{ chiuso}\}\ \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}}\ \{I\subseteq\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]\mid I\text{ ideale}\}$$
$$X\longmapsto I(X)$$

Abbiamo visto $X=V(I(X))$.

Oss.: $I(X)$ è un ideale radicale. Ci restringiamo a questi.

Serve anche $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$.

Nullstellensatz: $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$, valgono le seguenti affermazioni equivalenti ($J\subseteq\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$ ideale):

(1) $V(J)=\emptyset\iff 1\in J$

(2) J massimale $\iff J=I(P)$, $P\in\mathbb{A}^n$.

(3) $I(V(J))=\sqrt{J}$.