$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ fissato.

$X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso, $\mathbb{K}[X] := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ è l'"anello delle coordinate di X" ("algebra affine").

È una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata e ridotta (cioè senza nilpotenti).

Corrispondenza V-I relativa: $J \subseteq \mathbb{K}[X]$ ideale,
$V_X(J) = \{P \in X \mid f(P) = 0 \ \forall f \in J\}$. $Y \subseteq X$ chiuso,
$I_X(Y) = \{f \in \mathbb{K}[X] \mid f(P) = 0 \ \forall P \in Y\}$.

Ricordo: $J \subseteq \mathbb{K}[X]$ ideale, $J_0 = \pi^{-1} J \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è un ideale $\supseteq I(X)$, dove $\pi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \to \mathbb{K}[X]$ è la proiezione al quoziente.

$Y \subseteq X$ chiuso $\Rightarrow Y$ chiuso di $\mathbb{A}^n \Rightarrow I(Y) \supseteq I(X) \Rightarrow$
$\Rightarrow I_X(Y) = I(Y)/I(X)$.

NSS relativo:
$$\begin{array}{ccc} \{Y \subseteq X \text{ chiuso}\} & \underset{V_X}{\overset{I_X}{\rightleftarrows}} \ 1:1 & \{J \subseteq \mathbb{K}[X] \mid J = \sqrt{J}\} \\ \cup\!\! | & & \cup\!\! | \\ \{Y \text{ irr.}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{J \subseteq \mathbb{K}[X] \mid J \text{ primo}\} \\ \cup\!\! | & & \cup\!\! | \\ \{\text{pti}\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{J \text{ massimale}\}. \end{array}$$

Oss.: $\mathbb{K}[X]$ è dominio $\Leftrightarrow I(X)$ primo $\Leftrightarrow X$ irr..

$X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ chiusi, $f : X \to Y$ chiusi.
Definisco
$$f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X], \quad g \mapsto g \circ f.$$

Funtorialità: • $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$, $(h \circ f)^* = f^* \circ h^*$;
• $(\mathrm{Id}_X)^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]}$.

Oss.: $f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ è omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre (cioè omo. di anelli con unità $\mathbb{K}$-lineare).

Es.: • $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^n$ inclusione, X chiuso.
$j^* : \underset{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]} \longrightarrow \mathbb{K}[X]$ è la proiezione al quoziente.

Caso speciale: $\mathbb{A}^1 \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^2$, $x \mapsto (x, 0)$, $j^* : \mathbb{K}[x, y] \to \mathbb{K}[x]$, $f(x,y) \mapsto f(x, 0)$.

• $\mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$, $(x, y) \mapsto x$, $p^* : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x, y]$ è l'inclusione.

Oss.: $f : X \to Y$ isomorfismo di chiusi affini $\Rightarrow f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ è isomorfismo (per funtorialità).

$C_3 = \{y - x^2 = z - xy = 0\}$.
$\mathbb{A}^1 \xrightarrow{f} C_3$, $t \mapsto (t, t^2, t^3)$, $C_3 \xrightarrow{g} \mathbb{A}^1$, $(x, y, z) \mapsto x$.

Ho: $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{A}^1}$, $f \circ g = \mathrm{Id}_{C_3} \Rightarrow f$ è un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[C_3] \arrow[r, "f^*"] & \mathbb{K}[t] \\ \mathbb{K}[x, y, z] \arrow[u, "j^*"] \arrow[ur, "{x \mapsto t,\ y \mapsto t^2,\ z \mapsto t^3}"'] & \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Ker} j^* = (y - x^2, z - xy) = (y - x^2, z - x^3) = I(C_3)$.

$C = \{y^2 - x^3 = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$
$\varphi : \mathbb{A}^1 \to C$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ è un morfismo bigettivo.

$I(C) = \sqrt{(y^2 - x^3)} \underset{y^2 - x^3 \text{ irr.}}{=} (y^2 - x^3) \Rightarrow C$ irr..

$\mathbb{K}[C] = \mathbb{K}[x, y]/(y^2 - x^3) \xrightarrow{\varphi^*} \mathbb{K}[t]$, $p(x, y) \longmapsto p(t^2, t^3)$. $t \notin \operatorname{Im} \varphi^* \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi^*$ non è suri. $\Rightarrow \varphi^*$ non è iso. $\Rightarrow \varphi$ non è iso..

Ex.: $\mathbb{K}[C]$ e $\mathbb{K}[t]$ non sono isomorfi $\Rightarrow$
$\Rightarrow C$ e $\mathbb{A}^1$ non sono isomorfi.

$f : X \to Y$ morfismo di chiusi affini, $f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$.
$\operatorname{Ker} f^*$ è un ideale, $V(\operatorname{Ker} f^*) = \overline{\operatorname{Im} f}$.

Oss.: f è dominante $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f^* = (0) \Leftrightarrow f^*$ iniettiva.

$P \in X$, $I(P) \subseteq \mathbb{K}[X]$. $f(P)$ conoscendo $f^* : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$?
$(f^*)^{-1}(I(P)) = \{g \in \mathbb{K}[Y] \mid f^* g \in I(P)\} = \{g \mid g \circ f \in I(P)\} =$
$= \{g \mid g(f(P)) = 0\} = I(f(P))$.

Prop.: X, Y chiusi affini, $\varphi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ omo. di $\mathbb{K}$-algebre.
$\exists !\, f : X \to Y$ t.c. $\varphi = f^*$.

Dim.: caso $X = \mathbb{A}^n$, $Y = \mathbb{A}^m$.
$\varphi : \mathbb{K}[y_1, \dots, y_m] \to \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Pongo $f_i = \varphi(y_i) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $i = 1, \dots, m$.
$f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ è un morfismo t.c. $f^* y_i = f_i = \varphi(y_i) \Rightarrow$
$\Rightarrow f^*$ e φ coincidono su $y_1, \dots, y_m \Rightarrow f^* = \varphi$.

Caso generale: $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[X] & \mathbb{K}[Y] \arrow[l, "\varphi"'] \\ \mathbb{K}[\mathbb{A}^n] \arrow[u, two heads] & \mathbb{K}[\mathbb{A}^m] \arrow[u, two heads] \arrow[l, "\tilde{\varphi}"] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

$\tilde{\varphi}$ è un sollevamento (non unico). Per il caso precedente, $\tilde{\varphi} = (\tilde{f})^*$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n \arrow[r] & \mathbb{A}^m \\ X \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{f}|_X"'] & Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

passare agli ideali

Vale $\tilde{f}(X) \subseteq Y$ per commutatività del diagramma precedente.

Unicità: deriva dal fatto che φ è $\mathbb{K}$-lineare, quindi determinata unicamente da $\varphi(y_1), \dots, \varphi(y_m)$. □

Cor.: X, Y chiusi affini. $X \cong Y \Leftrightarrow \mathbb{K}[X] \cong \mathbb{K}[Y]$ come $\mathbb{K}$-algebre.

Dim.: ($\Rightarrow$) già fatto.
($\Leftarrow$) $\varphi : \mathbb{K}[Y] \to \mathbb{K}[X]$ iso. di $\mathbb{K}$-algebre $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists f : X \to Y$ morfismo t.c. $f^* = \varphi$,
$\exists g : Y \to X$ " t.c. $g^* = \varphi^{-1}$.
$(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[Y]}$, $(g \circ f)^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}[X]} \overset{\text{unicità}}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{Id}_X \Rightarrow X \cong Y$. □

Abbiamo un funtore
Chiusi affini $\xrightarrow{F}$ $\mathbb{K}$-algebre ridotte finitamente generate;
è un'equivalenza di categorie.

Infatti: • F è bigettivo sui morfismi (F è pienamente fedele);
• F è essenzialmente suriettivo (ogni A $\mathbb{K}$-a. ridotta f.g. è $\cong \mathbb{K}[X]$ per qualche X). Infatti, A fin. gen. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, p : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow A$ omo. suri. $\mathbb{K}$-lineare.
$\operatorname{Ker} p = J$, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/J = A$, $J = \sqrt{J} \underset{\text{NSS}}{\Rightarrow} J = I(V(J))$.
$X = V(J) \Rightarrow A \cong \mathbb{K}[X]$.

A $\mathbb{K}$-algebra fin. gen. (non necessariamente ridotta), $\mathbb{K}$ qualunque.
$\{M \subseteq A \mid \text{ideale massimale}\} = \operatorname{Spec}_{\max}(A)$.

Topologia (di Zariski) su $\operatorname{Spec}_{\max}(A)$: $J \subseteq A$ ideale,
$V(J) = \{M \in \operatorname{Spec}_{\max}(A) \mid M \supseteq J\}$ sono i chiusi (ex.: verifica).

$A = \mathbb{K}$, $\operatorname{Spec}_{\max}(A) = \{(0)\}$.
$\operatorname{Spec}_{\max} \mathbb{K}[x] = \{(p) \mid p \in \mathbb{K}[x] \text{ irr.}\}$
Se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $\operatorname{Spec}_{\max} \mathbb{K}[x] = \{(x - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$.
Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\operatorname{Spec}_{\max} \mathbb{R}[x] = \{(x - \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{(x - z)(x - \bar{z}) \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.

A, B $\mathbb{K}$-algebre fin. gen., $\varphi : B \to A$ omomorfismo $\mathbb{K}$-lineare.
Dato $M \subseteq A$ massimale, $\varphi^\#(M) := \varphi^{-1}(M)$.
Vale $\varphi^\#(M)$ massimale:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ B/\varphi^\# M \arrow[r, hook] & A/M \end{tikzcd}$$

A/M: $\mathbb{K}$-algebra fin. gen. e campo K

NSS $\Rightarrow K$ estensione algebrica di $\mathbb{K} \Rightarrow K/\mathbb{K}$ è finita $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ho un'immersione $\Rightarrow B/\varphi^\# M$ è dominio e s.v. di dim finita su $\mathbb{K} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ è un campo $\Rightarrow \varphi^\# M$ massimale.

$\varphi^\# : \operatorname{Spec}_{\max} A \to \operatorname{Spec}_{\max} B$. Ex.: $\varphi^\#$ è un morfismo.

Situazione generale: A anello (commutativo con unità),
$\operatorname{Spec} A = \{P \subseteq A \mid P \text{ è primo}\}$, la topologia è come prima.
$P \in \operatorname{Spec} A$, $\overline{P} = V(P)$ (ex.), perciò $P = \overline{P} \Leftrightarrow$ è massimale.

$\operatorname{Spec} \mathbb{K}[x] = \operatorname{Spec}_{\max} \mathbb{K}[x] \cup \underset{\text{pto generico (è denso)}}{\{(0)\}}$

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $\operatorname{Spec} \mathbb{K}[x, y] = \underset{\text{pti chiusi}}{\{(x - \alpha, y - \beta)\}} \cup \{(f) \mid f \text{ irr.}\} \cup \{(0)\}$

$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{(p) \mid p \text{ primo}\} \cup \{(0)\}$

Ex.: descrivere $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$.

Dato $\varphi : B \to A$ omo., come prima definiamo $\varphi^\# : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$, $P \mapsto \varphi^{-1}(P)$.

Sia A $\mathbb{K}$-algebra.
Morfismi da $\operatorname{Spec} \mathbb{K}$ in $\operatorname{Spec} A$ indotti da omomorfismi $\mathbb{K}$-lineari:
$\varphi : A \to \mathbb{K}$ $\mathbb{K}$-lineare, $\operatorname{Ker} \varphi = M$ è massimale.
$\varphi^\# : \underset{\{\text{pto}\}}{\operatorname{Spec} \mathbb{K}} \to \operatorname{Spec} A$, $\varphi^\#(\text{pto}) = M$.

Se $A = \mathbb{R}[x]$, $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-lineare, allora $\mathbb{R}[x]/M \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$.
Quindi $M = (x - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K}[\varepsilon] = \mathbb{K}[t]/(t^2)$ $(\{a + b\varepsilon \mid \varepsilon^2 = 0\})$. indotti da mappe $\mathbb{K}$-lineari

Ex.: X chiuso affine, descrivere i morfismi $(/\mathbb{K})$
$\operatorname{Spec} \mathbb{K}[\varepsilon] \to \operatorname{Spec} \mathbb{K}[X]$.