$\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$, X varietà q.p. $\subseteq \mathbb{P}^n$.

Def.: $f: X \to \mathbb{K}$ è regolare se $\forall P \in X$ $\exists$ $P \in U$ intorno aperto e $A, B \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$ t.c. $V(B) \cap U = \emptyset$ e $f(Q) = \frac{A(Q)}{B(Q)}$ $\forall Q \in U$.

Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso, $f: X \to \mathbb{K}$ è regolare $\iff \forall P \in X \exists P \in U$ intorno aperto e $a, b \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ t.c. $V(b) \cap U = \emptyset$ e $f(Q) = \frac{a(Q)}{b(Q)}$ $\forall Q \in U$.

$\mathcal{O}_X(X) := \{ f: X \to \mathbb{K} \mid f \text{ regolare} \}$ è una $\mathbb{K}$-algebra.

Se $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso, $\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$.

Oss.: (1) X varietà q.p., $Y \subseteq X$, $f: X \to \mathbb{K}$ regolare $\Rightarrow f_{|Y}$ regolare.

(2) $f: X \to \mathbb{K} (= \mathbb{A}^1_{\mathbb{K}})$ regolare $\Rightarrow$ continua. Infatti, basta vedere che $\{f(x) = c\}$ è chiuso $\forall c \in \mathbb{K}$. Basta vedere che $\exists$ ricoprimento aperto U_i di X t.c. $U_i \cap \{f = c\}$ è chiuso in U_i. Posso supporre quindi $f = \frac{A(x)}{B(x)}$, $f = c \iff \underbrace{A(x) - cB(x) = 0}_{\text{ipersuperficie chiusa}}$.

In particolare, $f: X \to \mathbb{K}$ reg. $\Rightarrow \{f = 0\} \subseteq X$ è chiuso.

(3) $f: X \to \mathbb{K}$ reg., $f(x) \neq 0$ $\forall x \in X \Rightarrow \frac{1}{f}$ reg..

Teo.: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso $\Rightarrow i: \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ è un iso..

Dim.: basta far vedere che è suriettiva.

Sia $\varphi \in \mathcal{O}_X(X)$, $J_\varphi = \{ f \in \mathbb{K}[X] \mid f \cdot \varphi \in \mathbb{K}[X] \}$ è un ideale.

Sia $P \in X$. Scrivo $X = (X_1 \cup \dots \cup X_k) \cup \underbrace{(X_{k+1} \cup \dots \cup X_m)}_{Z}$, X_i irr., $P \in X_i \iff i \leq k$.

$\exists$ $U \ni P$ aperto t.c. $\varphi(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ $\forall x \in U$, $a, b \in \mathbb{K}[X]$, $V(b) \cap U = \emptyset$.

$b \cdot \varphi - a = 0$ su U. Se $i \leq k$, $b\varphi - a = 0$ su $X_i \cap U$ aperto $\neq \emptyset$ di $X_i \Rightarrow$

X_i irr. $\Rightarrow$ denso $\underset{\{b\varphi - a = 0\} \text{ chiuso}}{\Rightarrow}$ è tutto $\Rightarrow b\varphi - a = 0$ su $X_1 \cup \dots \cup X_k$.

NSS $\Rightarrow \exists$ $c \in \mathbb{K}[X]$ t.c. $c = 0$ su Z, $c(P) \neq 0$.

Ho $(cb)\varphi = ca$ su $X \Rightarrow cb \in J_\varphi$, $(cb)(P) \neq 0$.

Allora $V(J_\varphi) = \emptyset$ per arbitrarietà di $P \underset{\text{NSS}}{\Rightarrow} 1 \in J_\varphi \Rightarrow \varphi \in \mathbb{K}[X]$. $\square$

Cor.: $f: \mathbb{P}^n \to \mathbb{K}$ reg. $\Rightarrow f$ costante.

Dim.: se $n = 1$, $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$. Su U_0 ho coord. $t = \frac{x_1}{x_0}$, su U_1 ho $s = \frac{x_0}{x_1}$, $t = \frac{1}{s}$ su $U_0 \cap U_1$. $f_{|U_0} = p(t)$, $f_{|U_1} = q(s)$. Se $\deg p = 0$, $p = c$ costante $\Rightarrow$

$\Rightarrow p = c$ su $\mathbb{P}^1$ perché $\mathbb{P}^1$ irr.. Suppongo $\deg p = m \geq 1$,

$p(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_m$, $a_0 \neq 0$.

Su $U_0 \cap U_1$, $q(s) = p\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^m}(a_0 + a_1 s + \dots + a_m s^m) \Rightarrow$

$\Rightarrow s^m q(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_m s^m$ su U_1 per densità $\Rightarrow \forall s$,

Ex.: $X \subseteq Y$ varietà q.p., X irr. $\iff \overline{X}$ irr.

assurdo perché $a_0 \neq 0$.

Se $n > 1$: data $f: \mathbb{P}^n \to \mathbb{K}$ reg., $\forall l \subseteq \mathbb{P}^n$ $f_{|l}$ è reg. $\Rightarrow$ cost. $\Rightarrow f$ cost.. $\square$

Def.: X, Y var. q.p., $f: X \to Y$ è un morfismo se:

(1) f è continua;

(2) $\forall (V, \varphi)$ t.c. $V \subseteq Y$ aperto, $\varphi \in \mathcal{O}_V(V)$, $\varphi \circ f : f^{-1}(V) \to \mathbb{K}$ è regolare.

Oss.:
- Id_X è un morfismo
- mappa costante è un morfismo
- un'inclusione è un morfismo
- composizione di morfismi è morfismo

$f: X \to Y$ morfismo,

Def.: f è isomorfismo $\iff \exists$ $g: Y \to X$ morfismo t.c. $g \circ f = Id_X$, $f \circ g = Id_Y$.

Data $f: X \to Y$ morfismo, ho $f^*: \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ omo. $\mathbb{K}$-lineare.

Prop.: X var. q.p., $f = (f_1, \dots, f_m): X \to \mathbb{A}^m$. f morfismo $\iff$
$\iff f_i \in \mathcal{O}_X(X)$ $\forall i$. **Dim.:** ex. $\square$

Cor.: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso, $f: X \to \mathbb{A}^m$ morfismo $\iff f$ polinomiale.

Dim. (del Cor.): abbiamo visto $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{K}[X]$, quindi f è morfismo $\iff$
$\iff f_i$ sono restrizioni di polinomi. $\square$

Conclusione: per X, Y chiusi affini, la "nuova" def. di morfismo coincide con la precedente.

Def.: X var. q.p., X è affine se è $\cong$ a un chiuso affine.

Per quanto visto, date X, Y varietà affini, $X \cong Y \iff \mathbb{K}[X] \cong \mathbb{K}[Y]$ come $\mathbb{K}$-algebre.

Prop.: $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso, $g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$:
- $X_g = \{ x \in X \mid g(x) \neq 0 \}$ è affine;
- $\mathbb{K}[X_g] = \mathbb{K}[X]_g$.

Dim.: $I(X) = (f_1, \dots, f_m)$. $J = (f_1, \dots, f_m, yg - 1) \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y]$.

$Y = V(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. $\varphi: X_g \to Y$, $(x) \mapsto (x, 1/g)$ è un morfismo perché le componenti sono regolari.

$\psi: Y \to X_g^{\subseteq X}$, $(x, y) \mapsto (x)$ è un morfismo. φ e ψ sono una l'inversa dell'altra.

Ho
$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[X] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{K}[X_g] \arrow[d, "\wr"] \\ \mathbb{K}[X]_g \arrow[r, "h"] & \mathbb{K}[Y] \end{tikzcd}$$

h $\exists$ per la proprietà universale della localizzazione

h è suriettiva. Infatti, $\operatorname{Im} h$ contiene le classi di $x_1, \dots, x_n, y$.

Sia $\frac{a}{g^k} \in \operatorname{Ker} h \Rightarrow a \in \operatorname{Ker} h \Rightarrow a = 0$ su $X_g \Rightarrow ga = 0$ su $X \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 0$ in $\mathbb{K}[X]_g \Rightarrow h$ iniettiva. $\square$

Cor.: X q.p. $\Rightarrow X$ ha una base di aperti affini.

Dim.: (a) $X \subseteq \mathbb{A}^n \Rightarrow X = \overline{X} \setminus Z$ dove Z è chiuso di $\mathbb{A}^n$.

Se $U \subseteq X$ è aperto, U è aperto in $\overline{X} \Rightarrow U$ è unione di aperti principali di $\overline{X}$ contenuti in X, che sono affini per la prop..

(b) Caso generale. $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $X = \bigcup_{i=0}^{n} X_i$, $X_i = U_i \cap X \subseteq U_i = \mathbb{A}^n$ è quasi affine. Per il caso precedente, X_i ha una base di aperti affini $\forall i = 0, \dots, n$. Dato che gli X_i sono aperti di X, ho concluso. $\square$