$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{K} \Rightarrow$ c'è un solo ideale massimale, $(0) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ se $\mathbb{P}^n$ fosse affine, avrebbe un solo pto, assurdo.

Oss.: X affine, $P \neq Q \in X \Rightarrow \exists f \in \mathbb{K}[X]$ t.c. $f(P)=0$, $f(Q) \neq 0$.
Infatti, suppongo $X \subseteq \mathbb{A}^n$ chiuso, $P=(a_1,\dots,a_n)$, $Q=(b_1,\dots,b_n)$, WLOG $a_1 \neq b_1$, prendo $f = x_1 - a_1$.

Es.: $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è affine. L'inclusione $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{A}^2$ dà $\mathbb{K}[x,y] \overset{i^*}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_X(X)$. Scrivo $X = U \cup V$, $U = \{x \neq 0\}$, $V = \{y \neq 0\}$ affini.
$\mathbb{K}[U] = \mathbb{K}[x,y]_x$, $\mathbb{K}[V] = \mathbb{K}[x,y]_y$. Voglio far vedere che
$\mathbb{K}[x,y] \xrightarrow{i^*} \mathbb{K}[X]$ è un iso.. $\operatorname{Ker} i^* = \{0\}$ perché X è denso in $\mathbb{A}^2$ che è irriducibile.
Sia $\varphi \in \mathcal{O}_X(X)$: $\varphi_{|U}$, $\varphi_{|V}$ sono regolari. Se $\varphi_{|U} = f_{|U}$ per $f \in \mathbb{K}[x,y]$, $\varphi - f = 0$ su $U \Rightarrow \varphi = f \in \mathcal{O}_X(X) \Rightarrow \varphi \in \operatorname{Im} i^*$. Allo stesso modo, $\varphi \in \operatorname{Im} i^*$ se $\varphi_{|V}$ è polinomiale.
Posso supporre $\varphi_{|U} = \frac{a(x,y)}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \nmid a(x,y)$,
$\varphi_{|V} = \frac{b(x,y)}{y^\beta}$, $\beta > 0$, $y \nmid b(x,y)$. Su $U \cap V$, $\frac{b}{y^\beta} = \frac{a}{x^\alpha} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^\alpha b - y^\beta a = 0$ su $\underbrace{U \cap V}_{\text{aperto} \neq \emptyset \text{ in un irr.}} \Rightarrow x^\alpha b - y^\beta a = 0$ in $\mathbb{A}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^\alpha b = y^\beta a \in \mathbb{K}[x,y]$, $x \nmid a \Rightarrow x \mid y^\beta$, assurdo.
Allora i^* è suriettiva.
Per concludere, due modi:
(1) se X fosse affine, i^* iso. $\Rightarrow i$ iso., assurdo;
(2) NSS relativo non vale in X: $M = (x,y)$ massimale, ma $V_X(M) = \emptyset$.

Dim. della prop. della volta scorsa che si era scordata:
($\Rightarrow$) $f_i = f^* y_i$.
($\Leftarrow$) (a) Continuità: dato $g \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^m]$, $f^{-1}(V(g)) = \{x \in X \mid f^*g(x) = 0\}$, chiuso perché f^*g è reg..
(b) Dato $U \subseteq \mathbb{A}^m$ aperto, $\varphi: U \to \mathbb{K}$ reg., $f^*\varphi$ è reg. su $f^{-1}(U)$?
WLOG $\varphi = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^m]$, $V(b) \cap U = \emptyset$,
$f^*\varphi = \frac{a(f_1,\dots,f_m)}{b(f_1,\dots,f_m)}$ è reg. su $f^{-1}(U)$. $\square$

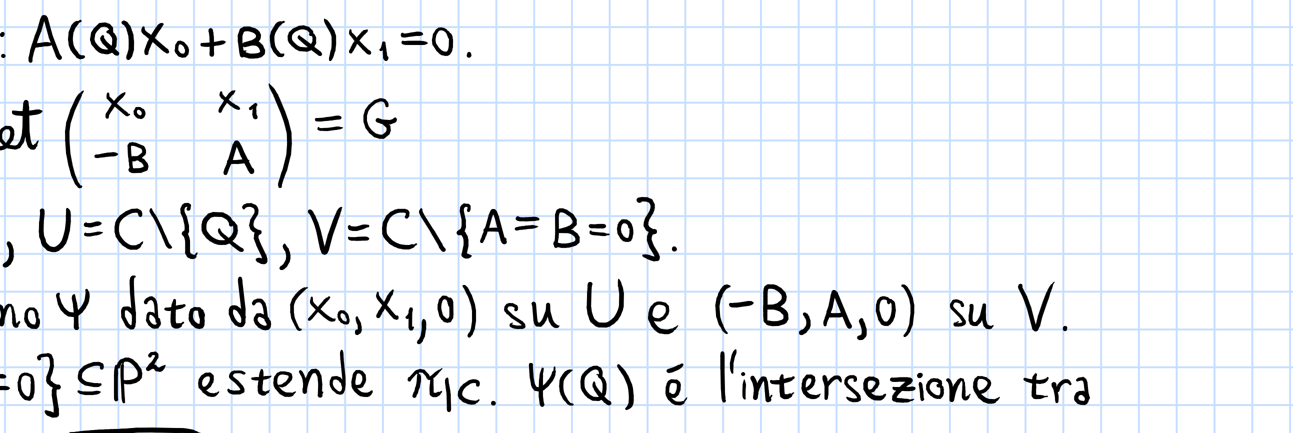
Morfismi a valori in $\mathbb{P}^m$

$X \subseteq \mathbb{P}^n$ var. q.p.. Siano $F_0,\dots,F_m \in \mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d$ t.c. $V(F_0,\dots,F_m) \cap X = \emptyset$. Definisco $f: X \longrightarrow \mathbb{P}^m$, $[x] \longmapsto [F_0(x),\dots,F_m(x)]$, ben def..
Verifichiamo che f è un morfismo:
(a) continuità: sia $G \in \mathbb{K}[y_0,\dots,y_m]_t$, $f^{-1}(V(G)) = V(G(F_0,\dots,F_m)) \cap X$ chiuso in X;
(b) pull-back di funzioni regolari: sia $U \subseteq \mathbb{P}^m$ e $\varphi: U \to \mathbb{K}$ data da $\frac{A(y)}{B(y)}$ con A, B omogenei dello stesso grado e $V(B) \cap U = \emptyset$, allora $f^*\varphi = \frac{A(F_0,\dots,F_m)}{B(F_0,\dots,F_m)}$ è reg. su $f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{P}^n$.

Generalizzazione

Se $X = \bigcup_i U_i$ e $\forall U_i$ ho $F_0^{(i)},\dots,F_m^{(i)}$ come sopra omogenei di grado d_i e su $U_i \cap U_j$ $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} F_0^{(i)} & \cdots & F_m^{(i)} \\ F_0^{(j)} & \cdots & F_m^{(j)} \end{pmatrix} = 1$, allora $\exists$ morfismo $f: X \to \mathbb{P}^m$ t.c. $f_{|U_i} = [F_0^{(i)},\dots,F_m^{(i)}]$. Verifica: ex..

Es.: (1) le proiettività sono isomorfismi
(2) proiettività degeneri: $0 \neq A$ matrice $(m+1)\times(n+1)$, $H = \mathbb{P}(\operatorname{Ker} A) \subseteq \mathbb{P}^n$, $X = \mathbb{P}^n \setminus H$, ho un morfismo
$X \to \mathbb{P}(\operatorname{Im} A) \subseteq \mathbb{P}^m$
$[x] \longmapsto [Ax]$
(3) $(x_0, x_1, x_2) \longrightarrow (x_0, x_1, 0)$
$\pi: \mathbb{P}^2 \setminus \{[0,0,1]\} \longrightarrow \{x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$ è un morfismo;
geometricamente:



prendiamo C curva piana, se $Q \notin C$, $\pi_{|C}: C \to \mathbb{P}^1$ è un morfismo.
Se $Q \in C$ ed è liscio: $C = [G]$, $G \in \mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_d$.
$Q \in C \Leftrightarrow G = x_0A + x_1B$, $A, B \in \mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_{d-1}$.
$\frac{\partial G}{\partial x_2}(Q) = 0$, $\frac{\partial G}{\partial x_1}(Q) = B(Q)$, $\frac{\partial G}{\partial x_0} = A(Q)$. Q è liscio $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A(Q), B(Q)) \neq (0,0)$.
$\overline{T_Q(C)}: A(Q)x_0 + B(Q)x_1 = 0$.
$\det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ -B & A \end{pmatrix} = G$
$C = U \cup V$, $U = C \setminus \{Q\}$, $V = C \setminus \{A = B = 0\}$.
Ho un morfismo ψ dato da $(x_0, x_1, 0)$ su U e $(-B, A, 0)$ su V.
$\psi: C \to \{x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$ estende $\pi_{|C}$. $\psi(Q)$ è l'intersezione tra $\{x_2 = 0\}$ e $\overline{T_Q(C)}$.

Mappe di Veronese

$v_{n,d}: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$ è data da tutti i monomi di grado d, quindi $N = \binom{d+n}{n} - 1$.
Es.: $n=1$, $d=2$: $v_{1,2}: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, $[s,t] \mapsto [s^2, st, t^2]$.
$\operatorname{Im} v_{1,2} \subseteq \{x_0x_2 - x_1^2 = 0\} = \left\{\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \leq 1\right\} = C_2$.
Usando la carta affine $s=1$, $(t) \mapsto (t, t^2) \in U_0 = \{x_0 \neq 0\}$
$[0,1] \mapsto [0,0,1] = C_2 \cap \{x_0 = 0\} \Rightarrow v_{1,2}$ è bigettiva.
$\psi: C_2 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ dato da x_0, x_1 su $C_2 \setminus \{[0,0,1]\}$, x_1, x_2 su $C_2 \setminus \{[1,0,0]\}$ è un morfismo e (ex.) è l'inversa di $v_{1,2}$.

$v_{1,3}: \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$, $[s,t] \longmapsto [s^3, s^2t, st^2, t^3]$
$\operatorname{Im} v_{1,3} \subseteq C_3 = \left\{\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \leq 1\right\}$. L'inversa è il morfismo dato dalle colonne di $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$.
In generale, $v_{1,n}: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$, $[s,t] \mapsto [s^n, s^{n-1}t, \dots, st^{n-1}, t^n]$ dà un isomorfismo con $C_n = \left\{\operatorname{rk}\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \leq 1\right\}$.

$v_{2,2}: \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\underbrace{S(3)}_{\text{simmetriche}})$
$[x_0,x_1,x_2] \longmapsto \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0x_1 & x_0x_2 \\ x_0x_1 & x_1^2 & x_1x_2 \\ x_0x_2 & x_1x_2 & x_2^2 \end{bmatrix}$
superficie di Veronese
$\Sigma_2 = \{(y_{ij}) \mid \operatorname{rk}(y_{ij}) \leq 1\}$ è un chiuso di $\mathbb{P}^5$ e
$\psi: \Sigma_2 \to \mathbb{P}^2$ è il morfismo dato dalle colonne di (y_{ij}), inversa di $v_{2,2}$.