$\mathrm{Im}\, v_{1,2}$ = "curva razionale normale di grado d"

Caso generale: $I=(i_0,\dots,i_n)$, $|I|=i_0+\dots+i_n$, $X^I=X_0^{i_0}\cdot\ldots\cdot X_n^{i_n}$.

$v_{n,d}$ è data dai monomi $(X^I)_{|I|=d}$. Variabili omogenee su $\mathbb{P}^N$ $(z_I)_{|I|=d}$, la mappa è $z_I=x^I$.

$\mathrm{Im}\, v_{n,d} \subseteq \{ z_I z_J - z_{I'} z_{J'} = 0 \mid |I|=|J|=|I'|=|J'|=d,\ I+J=I'+J' \} =: \Sigma_{n,d}$.

Fatto: $\mathrm{Im}\, v_{n,d} = \Sigma_{n,d}$ e $v_{n,d}:\mathbb{P}^n \to \Sigma_{n,d}$ è iso..

Idea della dim.: (1) $\Sigma_{n,d} \subseteq \{z_{d,0,\dots,0}\neq 0\} \cup \{z_{0,d,0,\dots,0}\neq 0\} \cup \dots \cup \{z_{0,\dots,0,d}\neq 0\}$.

Infatti, se $z_{d,0,\dots,0}=0$ per $Q\in\Sigma_{n,d}$ allora si annullano tutti gli z_I t.c. $i_0>0$ per induzione. Ripeto per $z_{0,d,0,\dots,0}$ etc. $\Rightarrow$ assurdo.

Definisco $\psi:\Sigma_{n,d}\to\mathbb{P}^n$, $\psi_{|\{z_{d,0,\dots,0}\neq 0\}}:\Sigma_{n,d}\to\mathbb{P}^n$

Usando le equazioni si verifica che la mappa è $(z_I)\mapsto (z_{d,0,\dots,0}, z_{d-1,1,0,\dots,0},\dots, z_{d-1,0,\dots,0,1})$ ben definita e usando carte locali si verifica che è l'inversa di $v_{n,d}$ (ex.).

$H\subseteq\mathbb{P}^N$ iperpiano, $v_{n,d}^{-1}(H)=?$

Es.: $n=d=2$, $H=\{\sum_{i\leq j=0}^{2} a_{ij} z_{ij}=0\}$,

$$v_{2,2}^{-1}(H)=\Big\{\sum_{0\leq i\leq j\leq 2} a_{ij}x_i x_j=0\Big\} \text{ conica.}$$

C'è una corrispondenza 1:1.

In generale: $H\subseteq\mathbb{P}^N$, $\sum_{|I|=d} a_I z_I = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_{n,d}^{-1}(H)=\{\sum_{|I|=d} a_I x^I = 0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ corrispondenza biunivoca $(\mathbb{P}^N)^* \xleftrightarrow{1:1} \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d)$.

Applicazione: $X\subseteq\mathbb{P}^n$ chiuso, $0\neq F\in\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d$. $X_F = X\setminus V(F)$.

Fatto: X_F è affine. Infatti, sia $H\in(\mathbb{P}^N)^*$ l'iperpiano corrispondente a F tramite Veronese. $v_{n,d|X_F}: X_F \to \underbrace{v_{n,d}(X)\setminus H}_{\text{chiuso qui}} \subseteq \mathbb{P}^N\setminus H \cong \mathbb{A}^N$.

$\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$

Prodotti di varietà q.p.

Def.: X,Y var. q.p., un prodotto è (Z,p,q) t.c. Z è var. q.p., $p:Z\to X$, $q:Z\to Y$ morfismi t.c. $\forall\ T\xrightarrow{f}X$, $T\xrightarrow{g}Y$ $\exists!\,\Phi$ t.c.

$$\begin{tikzcd} & X & \\ T \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \arrow[ul, "p"'] \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

commuta.

Il prodotto è unico a meno di iso. (dim.: "general nonsense").

Si scrive $\Phi=f\times g$, $Z=X\times Y$, p e q sono le proiezioni.

Caso affine: $X=\mathbb{A}^n$, $Y=\mathbb{A}^m \Rightarrow X\times Y=\mathbb{A}^{n+m}$, p e q quelle che ti aspetti.

T varietà, $f:T\to\mathbb{A}^n$, $g:T\to\mathbb{A}^m$, voglio $f\times g$. Se $f=(f_1,\dots,f_n)$, $g=(g_1,\dots,g_m)$ con $g_i,f_j\in\mathcal{O}_T(T)$, allora $f\times g=(f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_m)$.

È un morfismo e fa commutare il diagramma.

Oss.: la top. di $\mathbb{A}^{n+m}$ è più fine della topologia prodotto, perché p e q, essendo morfismi, sono mappe continue. In realtà, è strettamente più fine ($\{x-y=0\}\subseteq\mathbb{A}^2$ non è chiuso in $\mathbb{A}^1\times\mathbb{A}^1$).

Se $X\subseteq\mathbb{A}^n$, $Y\subseteq\mathbb{A}^m$ sono chiusi, il prodotto è $X\times Y\subseteq\mathbb{A}^{n+m}$, le proiezioni sono $p_{|X\times Y}$, $q_{|X\times Y}$. Il resto segue perché un morfismo $T\xrightarrow{f}X\subseteq\mathbb{A}^n$ è morfismo anche se lo guardo come $f:T\to\mathbb{A}^n$, $f(T)\subseteq X$.

Cor.: X,Y affini $\Rightarrow X\times Y$ è affine.

X,Y affini, $\mu:\mathbb{K}[X]\otimes_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[Y]\to\mathbb{K}[X\times Y]$, $f\otimes g\mapsto f\cdot g$ è un omomorfismo di $\mathbb{K}$-algebre.

Prop.: μ è un iso..

Dim.: (1) μ è suriettiva: se $x_1,\dots,x_n$ sono le restrizioni a X delle coordinate su $\mathbb{A}^n$, $\mu(x_i\otimes 1)=x_i$ e lo stesso per $y_1,\dots,y_m$.

(2) μ è iniettiva:

$\sum_{i=1}^{t} f_i\otimes g_i\in\ker\mu$ e suppongo $g_1,\dots,g_t$ lin. indi. in $\mathbb{K}[Y]$.

Ho $\sum_{i=1}^{t} f_i(x)g_i(y)=0$ su $X\times Y$. Sia $\bar{x}\in X$:

$\sum_{i=1}^{t} \underset{\mathbb{K}}{\underset{\cap}{f_i(\bar{x})}}\, g_i(y)=0$ su Y, g_i lin. indi. $\Rightarrow f_i(\bar{x})=0\ \forall i$, ma vale $\forall\bar{x}\in X \Rightarrow f_i=0\in\mathbb{K}[X]$. $\square$

Oss.: se A,B sono $\mathbb{K}$-algebre, il prodotto $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}A$, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{K}}B$ è $\mathrm{Spec}(A\otimes_{\mathbb{K}}B)$ (no dim.).

Ad esempio, $A=\mathbb{K}[x]$, $B=\mathbb{K}[y]$, $\mathrm{Spec}A\times\mathrm{Spec}B=\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[x,y])$.

I punti chiusi del prodotto sono il prodotto dei punti chiusi di $\mathrm{Spec}A$ e $\mathrm{Spec}B$. Ci sono molti altri punti non chiusi.

Caso generale:

Strategia:
- costruisco $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$; risulta essere una var. proiettiva
- $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ coincide con il prodotto cartesiano $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ la top. su $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m$ è più fine della top. prodotto.

$X=\overline{X}\cap \underset{\text{aperto di }\mathbb{P}^n}{U}\subseteq\mathbb{P}^n$, $Y=\overline{Y}\cap \underset{\text{aperto di }\mathbb{P}^m}{V}\subseteq\mathbb{P}^m$ varietà q.p..

$X\times Y=(\underset{\text{chiuso}}{\overline{X}\cap\overline{Y}})\cap(\underset{\text{aperto}}{U\times V})\subseteq\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m \Rightarrow X\times Y$ è varietà q.p., ed è il prodotto (con le proiezioni che ti aspetti).

Oss.: X,Y proiettive $\Rightarrow X\times Y$ proiettiva.

Caso $n=m=1$: considero $s_{1,1}:\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^3=\mathbb{P}(M(2))$, $([x_0,x_1],[y_0,y_1])\mapsto \begin{bmatrix} x_0y_0 & x_0y_1 \\ x_1y_0 & x_1y_1\end{bmatrix}$, la mappa di Segre. È ben def..

$\mathrm{Im}\, s_{1,1}\subseteq\Sigma_{1,1}=\{\mathrm{rk}(z_{ij})\leq 1\}=\underset{\text{quadrica non degenere}}{\{z_{00}z_{11}-z_{01}z_{10}=0\}}$.

Definisco $p:\Sigma_{1,1}\to\mathbb{P}^1$ il morfismo dato dalle colonne.

q è quello dato dalle righe. $\Phi:\Sigma_{1,1}\to\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, $z\mapsto(p(z),q(z))$.

Φ e $s_{1,1}$ sono insiemisticamente una inversa dell'altra (ex.).

Claim.: $(\Sigma_{1,1},p,q)$ è il prodotto $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$. Proprietà universale:

$f:T\to\mathbb{P}^1$, $g:T\to\mathbb{P}^1$ morfismi. $T=\bigcup_{i,j=0}^{1}\big(f^{-1}(\{x_i\neq 0\})\cap g^{-1}(\{y_j\neq 0\})\big)$.

ricoprimenti aperti T_{ij}

Verifico che $f\times g_{|T_{ij}}$ è morfismo $\forall i,j$.

$i=j=0$:

$f_{|T_{00}}: T_{00}\to\mathbb{A}^1=\{x_0\neq 0\}\subseteq\mathbb{P}^1$, $t\mapsto f_0(t)$, $f_0\in\mathcal{O}_T(T)$, idem per g.

$T_{00}\to\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\xrightarrow{s_{1,1}}\Sigma_{1,1}\cap\{z_{00}\neq 0\}\subseteq\mathbb{A}^3$ è un

$t\mapsto([1,f_0(t)],[1,g_0(t)])\mapsto\begin{bmatrix}1 & f_0(t)\\ g_0(t) & f_0(t)g_0(t)\end{bmatrix}$

morfismo perché le coordinate sono regolari.