Prodotto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Applicazione di Segre

$$s_{n,m}: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N\big(\overset{(z_{ij})_{\substack{i=0,\dots,n\\ j=0,\dots,m}}}{M(n+1, m+1)}\big),\quad N = nm+m+n$$
$$([x],[y]) \longmapsto [x_i y_j]_{\substack{i=0,\dots,n\\ j=0,\dots,m}}$$

è ben def.. $\operatorname{Im} s_{n,m} \subseteq \Sigma_{n,m} = \{ \operatorname{rk}(z_{ij}) \leq 1 \}$.

$p: \Sigma_{n,m} \to \mathbb{P}^n$ morfismo dato dalle colonne,

$q: \Sigma_{n,m} \to \mathbb{P}^m$ " " " righe.

$\psi: \Sigma_{n,m} \to \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, $[z] \mapsto (p(z), q(z))$. Si verifica (ex.) che $\psi$ è l'inversa di $s_{n,m}$.

$s_{n,m}$ identifica $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ con $\Sigma_{n,m}$ che è un chiuso proiettivo.

$(\Sigma_{n,m}, p, q)$ è il prodotto. Infatti, se ho $T$ var. q.p., $T \xrightarrow{f} X$, $T \xrightarrow{g} Y$,

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f\times g"] \arrow[rr, bend left, "f\times g"] & \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \arrow[r, "\sim"] & \Sigma_{n,m} \end{tikzcd}$$
$$t \longmapsto (f(t), g(t))$$

$f \times g$ così definita commuta con $p, q$, devo vedere che è un morfismo.

$T_{ij} = f^{-1}(\{x_i \neq 0\}) \cap g^{-1}(\{y_j \neq 0\})$ sono aperti che ricoprono $T$,

basta vedere che $f \times g|_{T_{ij}}$ è morfismo $\forall i, j$. Ad esempio,

$f|_{T_{00}}: T_{00} \to \mathbb{A}^n = \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ ed è dato da $(\underbrace{f_1, \dots, f_n}_{\text{regolari}})$, analogo per $g$.

$f \times g|_{T_{00}}: T_{00} \to \Sigma_{n,m}$ è un morfismo perché

$$t \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & g_1(t) & \cdots & g_m(t) \\ f_1(t) & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ f_n(t) & & \cdots & f_n(t) g_m(t) \end{bmatrix} \in \{z_{00} \neq 0\} = \mathbb{A}^N$$

le entrate sono regolari.

Oss.: $[a] \in \mathbb{P}^n$ fissato, $\{[a]\} \times \mathbb{P}^m \xrightarrow{s_{n,m}} \mathbb{P}^N$ è iso. con un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^N \Rightarrow \Sigma_{n,m}$ contiene due famigli di sottospazi proiettivi di dim. $m$ e $n$ rispettivamente t.c. $\forall Q \in \Sigma_{n,m}$ passa esattamente un sottospazio per famiglia.

Es.: $n = m = 1$, $\Sigma_{1,1} = \{ z_{00} z_{11} - z_{01} z_{10} = 0 \} \subseteq \mathbb{P}^3$.

La top. su $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è più fine della top. prodotto (segue da $p, q$ continue).

Sia $\underset{F(z_{ij})}{\overset{\parallel}{F}}$ omogeneo su $\mathbb{P}^N$ e $\{F = 0\} \not\supseteq \Sigma_{n,m}$. A cosa corrisponde $V(F)$ in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$?

Considero $\underset{\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m]}{G(x,y) \in}\!\!= F(x_i y_j)$, se $d = \deg F$, $\deg G = 2d$ ed è omogeneo;

$G$ è biomogeneo di bigrado $(d, d)$ (è la def. che ti aspetti).

Oss.: se $F(x,y)$ è biomogeneo di bigrado $(a, b)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ si ha $F(\lambda x, \mu y) = \lambda^a \mu^b F(x,y)$. Quindi ha senso definire $V(F(x,y)) = \{ ([x],[y]) \mid F(x,y) = 0 \} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Tornando a noi, $V(F) \cap \Sigma_{n,m} = V(G(x,y)) \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

Conclusione: i chiusi di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ sono

$\bigcap_{i \in I} V(F_i(x,y))$, $F_i$ biomogeneo di grado $(d_i, d_i)$.

Es.:
- $\{[0,1]\} \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è chiuso. È $\{x_0 y_0 = 0\} \cap \{x_0 y_1 = 0\}$.
- $f = x_1 y_0^3 + x_0 (y_1^3 + y_1 y_0^2)$; $\underset{V(x_0^2 f) \cap V(x_1^2 f)}{\overset{\parallel}{V(f)}} \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ quindi è chiuso

Quindi $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è chiuso $\Leftrightarrow Z = \bigcap_{i \in I} V(f_i(x,y))$ con $f_i$ biomogenei di bigradi qualunque.

Funzioni regolari su $\underset{\text{loc. chiuso}}{\overset{\uparrow}{X}} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. Loc. vicino a $P \in X$:

$f$ reg. $\Leftrightarrow f = \dfrac{A(x,y)}{B(x,y)}$, $B \neq 0$ (in un intorno di $P$), $A, B$ biomogenei dello stesso bigrado $(d, d)$ per qualche $d$.

Più in generale, $f$ è data loc. da $\dfrac{A(x,y)}{B(x,y)}$ con $B \neq 0$ (loc.) e $A, B$ biomogenei di bigrado $(a, b)$ con $a, b$ opportuni. Il perché è facile da vedere.

Prop.: $X$ var. q.p., $\Delta_X = \{ (x,x) \mid x \in X \} \subseteq X \times X$ è chiusa.

Dim.: $X \subseteq \mathbb{P}^n \Rightarrow X \times X \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, $\Delta_X = X \times X \cap \Delta_{\mathbb{P}^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ basta vedere che $\Delta_{\mathbb{P}^n}$ è chiusa.

$$\Delta_{\mathbb{P}^n} = \left\{ \operatorname{rk} \begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_n \\ y_0 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \leq 1 \right\} = \bigcap_{i,j=0}^{n} V(x_i y_j - x_j y_i). \ \square$$

Cor.: $f, g: T \to X$ morfismi $\Rightarrow \{ t \mid f(t) = g(t) \} \subseteq T$ è chiuso.

Dim.: consideriamo $f \times g: T \to X \times X$; $\{ t \mid f(t) = g(t) \} = (f \times g)^{-1}(\Delta_X)$. $\square$

$f: X \to Y$ morfismo, $\Gamma_f = \{ (x,y) \mid y = f(x) \} \subseteq X \times Y$.

Cor.: $\Gamma_f$ è chiuso.

Dim.: considero $X \times Y \xrightarrow{\Phi} Y \times Y$, $(x,y) \longmapsto (f(x), y)$; $\Gamma_f = \Phi^{-1}(\Delta_Y)$ e $\Phi$ è un morfismo perché prodotto di $X \times Y \xrightarrow{p} X \xrightarrow{f} Y$ e $X \times Y \xrightarrow{q} Y$. $\square$

$X, Y$ var. q.p., fisso $x_0 \in X$, $j_{x_0}: Y \longrightarrow X \times Y$, $y \longmapsto (x_0, y)$.

$j_{x_0}$ è un morfismo, infatti è il prodotto di $Y \to \{x_0\} \subseteq X$ e $Y \xrightarrow{\mathrm{Id}} Y$.

$p|_{\{x_0\} \times Y}: \{x_0\} \times Y \to Y$ è l'inversa di $j_{x_0} \Rightarrow j_{x_0}$ iso., in particolare omeo. (con l'immagine).

Prop.: $X, Y$ var. q.p.. $X, Y$ irr. $\Leftrightarrow X \times Y$ irr..

Dim.: ($\Leftarrow$) basta usare le proiezioni, che sono continue.

($\Rightarrow$) Sia $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ con $Z_i$ chiusi. $\underset{\text{irr.}}{\{x_0\} \times Y} = \underbrace{((\{x_0\} \times Y) \cap Z_1) \cup ((\{x_0\} \times Y) \cap Z_2)}_{\text{chiusi}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \{x_0\} \times Y \subseteq Z_1$ o $\{x_0\} \times Y \subseteq Z_2$.

$X_1 = \{ x \in X \mid \{x\} \times Y \subseteq Z_1 \}$, $X_2$ analogo. $X = X_1 \cup X_2$.

Basta vedere che $X_1$ e $X_2$ sono chiusi.

$X_1 = \bigcap_{y \in Y} p((X \times \{y\}) \cap Z_1)$ intersezione di chiusi. $\square$