Prop.: X var. q.p., $U,V\subseteq X$ aperti affini $\Rightarrow U\cap V$ affine.

Dim.:
$j_U: U\to X$, $j_V: V\to X$ inclusioni,
$$U\times V \xrightarrow{f} X\times X.$$
$$(x_1,x_2)\longmapsto (j_U(x_1), j_V(x_2))$$
f è un morfismo. $f^{-1}(\Delta_X)\cong U\cap V$:
$$U\cap V \xrightarrow{h} U\times V,\quad h(U\cap V)=f^{-1}(\Delta_X).$$
$$x\longmapsto (x,x)$$
$$f^{-1}(\Delta_X)\xrightarrow{g=f^1|_{f^{-1}(\Delta_X)}} U\cap V.$$
h e g sono morfismi, uno inverso dell'altro.
Infine, $f^{-1}(\Delta_X)$ è chiuso in $U\times V$ affine, quindi è affine. □

Terminologia: $\mathbb{P}^N=\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d)$, l'ipersuperficie generale verifica (*) significa $\exists\ \emptyset\neq U\subseteq\mathbb{P}^N$ aperto t.c. tutte le ipersuperfici di U verificano (*).

Prop.: (1) l'ipersuperficie generale di grado d in $\mathbb{P}^n$ è irr. se $n\geq 2$.
(2) L'ipersuperficie generale di grado d è liscia.

Dim.: (1) $a,b\in\mathbb{N}$, $a,b>0$, $a+b=d$.
$$\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_a)\times\mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_b)\xrightarrow{\Phi_{a,b}}\mathbb{P}^N \quad \text{è}$$
$$([A],[B])\longmapsto [A\cdot B]$$
ben definita. $\Phi_{a,b}$ è un morfismo: se nei tre spazi fisso delle basi fatte di monomi, le coordinate omogenee di $[A\cdot B]$ sono pol. biomogenei di bigrado $(1,1)$ nei coefficienti di A e di B. Due modi per dedurre che $\Phi_{a,b}$ è un morfismo:
(i) le coordinate di $\Phi_{a,b}$, essendo di bigrado $(1,1)$, sono restrizioni di forme lineari nell'immersione di Segre $\Rightarrow$ danno un morfismo;
(ii) si può far vedere (ex.) che pol. $f_0,\dots,f_k\in\mathbb{K}[x_0,\dots,x_s,y_0,\dots,y_t]$ biomogenei di bigrado (α,β) senza zeri comuni in $\mathbb{P}^s\times\mathbb{P}^t$ danno un morfismo in $\mathbb{P}^k$.

Allora $\mathrm{Im}\,\Phi_{a,b}$ è chiuso. $[F]\in\mathbb{P}^N$ è irr. $\Leftrightarrow [F]\notin\bigcup_{\substack{a,b>0\\ a+b=d}}\mathrm{Im}\,\Phi_{a,b}$.
$U_{irr.}=\{[F]\text{ irr.}\}$ è un aperto, non vuoto:
$x_0^d+x_1^{d-1}x_2$ è irr., infatti disomogenizzo e trovo $1+x_1^{d-1}x_2$ irr. perché in $\mathbb{K}(x_1)[x_2]$ è primitivo e di grado 1.
(2) $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^N\supseteq\Gamma=\{(P,[F])\mid F\text{ è singolare in }P\}$.
Γ è chiuso: $\Gamma=\{(P,[F])\mid \underbrace{F(P)}_{\text{pol. biomogeneo di bigrado }(d,1)}=0,\ \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x_i}(P)}_{\text{" " }(d-1,1)}=0,\ i=0,\dots,n\}$.

$\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^N\xrightarrow{q}\mathbb{P}^N$ proiezione, $q(\Gamma)$ sono le F singolari.
$U_{sm}=\mathbb{P}^N\setminus q(\Gamma)$ è aperto.
↳ smooth, le $[F]$ lisce

$x_0^d+\dots+x_n^d$ è liscia se $\mathrm{char}\,\mathbb{K}\nmid d$.
Fatto: vale anche se $\mathrm{char}\,\mathbb{K}\mid d$. □

Funzioni razionali

X var. q.p. irr..
Una funzione razionale $f: X\dashrightarrow\mathbb{K}$ è una classe di equivalenza di coppie (U,φ) con $\emptyset\neq U\subseteq X$ aperto e $\varphi: U\to\mathbb{K}$ regolare.
$(U,\varphi)\sim(V,\psi)\Leftrightarrow\varphi=\psi$ su $U\cap V$. ⚠: transitività.
$(U,\varphi)\sim(V,\psi)\sim(W,\chi)\Rightarrow\varphi=\psi=\chi$ su $U\cap V\cap W\Rightarrow$
$\Rightarrow\varphi=\chi$ su $U\cap W$ perché $U\cap V\cap W$ è denso in $U\cap W$
(è tutto non vuoto perché intersezione di aperti non vuoti in un irr.).
Le funzioni razionali si possono: sommare, moltiplicare, invertire se $\neq 0$. Ex.: verificare che le operazioni sono ben def..
$\{f: X\dashrightarrow\mathbb{K}\}=:\mathbb{K}(X)$ ed è un campo.
Ex.: $U,V\subseteq X$ aperti densi $\Rightarrow U\cap V$ denso.
↳ non necessariamente irr.

Def.: dominio di $f: X\dashrightarrow\mathbb{K}$ razionale è $\bigcup_{\substack{(V,\varphi)\\ \text{rappresentanti di } f}} V$.

Es.: (1) $\mathcal{O}_X(X)\subseteq\mathbb{K}(X)$
(2) $X=\mathbb{P}^n$ $f: X\dashrightarrow\mathbb{K}$. $\exists$ rappresentazione $(U,\frac{A}{B})$ con A,B omogenei dello stesso grado e $V(B)\cap U=\emptyset$.
Se $(V,\frac{C}{D})$ è un altro rappresentante, $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ su $U\cap V\Rightarrow$
$\Rightarrow AD-BC=0$ su $U\cap V\underset{\mathbb{P}^n\text{ irr.}}{\Rightarrow} AD-BC=0$ in $\mathbb{P}^n\Rightarrow$
$\Rightarrow AD=BC$ in $\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]\Rightarrow\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ in $\mathbb{K}(x_0,\dots,x_n)$.
$\mathbb{K}(\mathbb{P}^n)=\{\frac{A}{B}\in\mathbb{K}(x_0,\dots,x_n)\mid A\text{ e }B\text{ omogenei dello stesso grado}\}$.
Ex.: data una funzione di queste, trovare il dominio.
(3) $X\subseteq\mathbb{A}^n$ chiuso irr.. $\mathbb{K}[X]$ è un dominio. $F=$ campo delle frazioni di $\mathbb{K}[X]$.
$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[X] \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{K}(X) \\ F \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$
Dico che g è un isomorfismo. g è iniettiva (mappa di campi).
g suriettiva: sia $f: X\dashrightarrow\mathbb{K}$ razionale, (U,φ) rappresentante.
A meno di restringere, $U=X_b$ per qualche $0\neq b\in\mathbb{K}[X]$.
↳ aperto principale
$\varphi\in\mathbb{K}[X_b]=\mathbb{K}[X]_b$, cioè
$\varphi=\frac{a}{b^k}$, $a\in\mathbb{K}[X]\Rightarrow f=g(\frac{a}{b^k})$.

Oss.: X affine $\Rightarrow\mathbb{K}(X)/\mathbb{K}$ finitamente generata (come estensione di campi), infatti se $b_1,\dots,b_t\in\mathbb{K}[X]$ generano $\mathbb{K}[X]$ come $\mathbb{K}$ algebra, $b_1,\dots,b_t$ generano $\mathbb{K}(X)/\mathbb{K}$.
(4) $X=\{xy-zw=0\}\subseteq\mathbb{A}^4$ è irr..
$\frac{x}{z}=\frac{w}{y}$ su $\{zy\neq 0\}$. Mi danno $f: X\dashrightarrow\mathbb{K}$ razionale su $\{z\neq 0\}\cup\{y\neq 0\}$.

Sia $X=V(f)\subseteq\mathbb{A}^{n+1}$ con $f\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n,y]$ irr.. Suppongo che y compaia in f.
$\mathbb{K}[X]=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n,y]/(f)$. f è irr. in $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_n)[y]$.
$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}(x_1,\dots,x_n)[y]/(f) & \\ \mathbb{K}[X] \arrow[u, "\psi"] \arrow[r] & \mathbb{K}(X) \arrow[ul, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$
$\mathbb{K}(x_1,\dots,x_n)[y]/(f)$ ↳ è un campo

Devo far vedere che
$\mathbb{K}[X]=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n,y]/(f)\xrightarrow{\psi}\mathbb{K}(x_1,\dots,x_n)[y]/(f)$ è iniettiva.
Infatti, sia $h\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n,y]$ t.c. $f\mid h$ in $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_n)[y]\overset{\text{lemma di Gauss}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow f\mid h$ in $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n][y]\Rightarrow\psi$ iniettiva $\Rightarrow\exists\,\alpha$ iso. di campi.

Applicazione razionale

X,Y var. q.p., X irr.. $f: X\dashrightarrow Y$ app. raz. è classe di equiv. di coppie (U,φ) con $\emptyset\neq U\subseteq X$ aperto e $\varphi: U\to Y$ morfismo (la rel. di equiv. è la stessa).

Es.:
- morfismi
- le funzioni razionali
- $\mathbb{A}^2\overset{\pi}{\dashrightarrow}\mathbb{P}^1$ (ex.: verifica che non è un morfismo).
  $(x,y)\longmapsto[x,y]$

Fatto: $\nexists\ \tilde\pi:\mathbb{A}^2\to\mathbb{P}^1$ che estende π

Dim.: PA $\exists\ \pi$ morfismo siffatto. Fisso $(a,b)\neq(0,0)$
$$\mathbb{A}^1\xrightarrow{\varphi_{a,b}}\mathbb{A}^2\xrightarrow{\tilde\pi}\mathbb{P}^1$$
$$t\longmapsto(ta,tb)$$
Per $t\neq 0$, $t\mapsto[a,b]$.
$\tilde\pi\circ\varphi_{a,b}$ e l'applicazione costante $\mathbb{A}^1\to\{[a,b]\}\subseteq\mathbb{P}^1$ coincidono per $t\neq 0\Rightarrow\forall t\Rightarrow$
$\Rightarrow\tilde\pi(\varphi_{a,b}(0))=\tilde\pi(0,0)=[a,b]\ \forall a,b$, assurdo. □