Def.: $f: X \dashrightarrow Y$ mappa razionale, X, Y irr.. f è dominante se dato un rappresentante (U, φ) di f ho che $\overline{\varphi(U)} = Y$.

Ex.: $\exists\, (U,\varphi) \Leftrightarrow \forall\, (U,\varphi)$.

Dati $X \overset{f}{\dashrightarrow} Y \overset{g}{\dashrightarrow} Z$ f, g razionali dominanti, ho $g \circ f : X \dashrightarrow Z$.

Se $Z = \mathbb{K}$, cioè se g è una funzione razionale su Y, $g \circ f$ è una funzione razionale su X.

Data $f: X \dashrightarrow Y$ razionale dominante, ho

$$f^*: \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X) \text{ omomorfismo di estensioni di } \mathbb{K}.$$

Funtorialità: $(\mathrm{Id}_X)^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}(X)}$. Se $X \overset{f}{\dashrightarrow} Y \overset{g}{\dashrightarrow} Z$ razionali dominanti, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Def.: $f: X \dashrightarrow Y$ raz. dom. è birazionale se $\exists\, g: Y \dashrightarrow X$ raz. dom. t.c. $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$.

Oss.: se $X \sim_{bir} Y$, allora $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$ su $\mathbb{K}$.

Es.: (1) $V \subseteq X$ aperto non vuoto $\Rightarrow V \hookrightarrow X$ è mappa birazionale.

In particolare, se $\emptyset \neq V \subseteq X$ aperto, $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(V)$.

Se prendo V affine, ho visto che $\mathbb{K}(V)$ è il campo quoziente di $\mathbb{K}[V] \Rightarrow \mathbb{K}(X)/\mathbb{K}$ è un'estensione finit. gen..

(2) Trasformazione di Cremona standard:

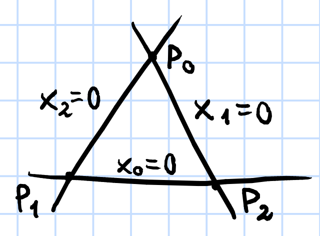
$$c: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2, \quad [x_0, x_1, x_2] \mapsto [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1]$$

def. tranne in $P_0 = [1,0,0]$, $P_1 = [0,1,0]$, $P_2 = [0,0,1]$.

Calcolo c^2:

$$[x_0, x_1, x_2] \xmapsto{c^2} [x_0^2x_1x_2, x_0x_1^2x_2, x_0x_1x_2^2] \overset{\text{se } x_0x_1x_2 \neq 0}{=} [x_0, x_1, x_2] \Rightarrow$$

$\Rightarrow c^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^2}$. c contrae $x_i = 0$ al punto P_i. Allora c non può essere estesa in P_0, P_1, P_2 perché $c^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^2}$.



Teo. (Noether-Enriques): $\mathcal{B}ir(\mathbb{P}^2)$ (gruppo delle mappe $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ birazionali) è generato da c e da $PGL(3)$. Dim.: no. $\square$

(3) $\mathbb{A}^n \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ bir. $\Rightarrow \underset{\mathbb{K}(x_1,\dots,x_n)}{\overset{\|}{\mathbb{K}(\mathbb{A}^n)}} \overset{j^*}{\underset{\sim}{\leftarrow}} \mathbb{K}(\mathbb{P}^n)$. Se $\varphi = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(\mathbb{P}^n)$,

$A, \underset{0}{\overset{\neq}{B}} \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$, d opportuno. $j^* \frac{A}{B} = \frac{A(1, x_1, \dots, x_n)}{B(1, x_1, \dots, x_n)}$.

Parametrizzazioni delle cubiche singolari:

$$\varphi: \mathbb{A}^1 \to C_1 = \{y^2 = x^3 + x^2\} \quad \text{è birazionale.}$$
$$t \mapsto (t^2 - 1, t(t^2-1))$$

φ^{-1} è bir.: $\varphi^{-1}: C_1 \dashrightarrow \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$.

$$\psi: \mathbb{A}^1 \to C_2 = \{y^2 = x^3\}, \quad \psi^{-1}: C_2 \dashrightarrow \mathbb{A}^1.$$
$$t \mapsto (t^2, t^3) \qquad\qquad (x,y) \mapsto \frac{y}{x}$$

$\mathbb{K}(C_1) = ?$ $\mathbb{K}[C_1] = \mathbb{K}[x,y]/(y^2 - x^2(x+1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{K}(C_1) = \mathbb{K}(x)[y]/(y^2 - x^2(x+1))$.

$$\mathbb{K}(\mathbb{A}^1) = \mathbb{K}(t) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}(C_1).$$
$$t \mapsto \frac{y}{x}$$

Prop.: X, Y var. q.p. irr., $\varphi: \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ omomorfismo su $\mathbb{K}$.
$\exists!\, f: X \dashrightarrow Y$ raz. dom. t.c. $f^* = \varphi$.

Dim.: posso supporre X, Y affini (basta considerare aperti affini).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{K}(X) & \\
\mathbb{K}[Y] \arrow[u, hook] \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[ur] & \mathbb{K}[X]_b \arrow[u] & \mathbb{K}[X] \arrow[l] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{K}[X]_b = \mathbb{K}[X_b]$

Dati $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{K}[Y]$ generatori, $\exists\, b \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ t.c. $\varphi(y_i) = \frac{a_i}{b}$, $a_i \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow \exists!\, \overline{f}: X_b \to Y$ morfismo t.c. $\overline{\varphi} = (\overline{f})^*$. $\overline{f}$ è dominante in quanto $\overline{\varphi} = (\overline{f})^*$ è iniettiva per costruzione. $\overline{f}$ determina $f: X \dashrightarrow Y$ raz. dom. t.c. $\varphi = f^*$. $\square$

Teo.: X, Y var. q.p. irr.. Sono equivalenti:

(1) $X \sim_{bir} Y$

(2) $\mathbb{K}(X) \cong \mathbb{K}(Y)$ come estensioni di $\mathbb{K}$

(3) $\exists\, U \subseteq X, V \subseteq Y$ aperti $\neq \emptyset$ t.c. $U \cong V$.

Dim.: (1)$\Rightarrow$(2): funtorialità.

(2)$\Rightarrow$(1): dato $\varphi: \mathbb{K}(Y) \to \mathbb{K}(X)$ iso. $\mathbb{K}$-lineare, $\exists$
$f: X \dashrightarrow Y$ raz. dom. t.c. $f^* = \varphi$ e
$g: Y \dashrightarrow X$ " " " $g^* = \varphi^{-1}$.

$(f \circ g)^* = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}(Y)} \Rightarrow f \circ g = \mathrm{Id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ analogo.

(3)$\Rightarrow$(1): $U \sim_{bir} X$, $V \sim_{bir} Y$, $U \sim_{bir} V$ e $\sim_{bir}$ è transitiva.

(1)$\Rightarrow$(3): posso supporre X, Y affini e $f: X \to Y$ morfismo bir..

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}(Y) \arrow[r, "f^*"] & \mathbb{K}(X) \arrow[r, "g^*"] & \mathbb{K}(Y) \\
\mathbb{K}[Y] \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{K}[X] \arrow[u] \arrow[r] & \mathbb{K}[Y]_b \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$f \circ g = \mathrm{Id}_Y$

, $b \in \mathbb{K}[Y] \setminus \{0\}$ opportuno.

Localizzo la seconda riga:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}[Y]_b \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Id}_{\mathbb{K}[Y]_b}"'] & \mathbb{K}[X]_{f^*b} \arrow[r] & \mathbb{K}[Y]_b
\end{tikzcd} \Rightarrow f^* \text{ induce } \underset{\mathbb{K}[Y_b]}{\overset{\|}{\mathbb{K}[Y]_b}} \xrightarrow{\sim} \underset{\mathbb{K}[X_{f^*b}]}{\overset{\|}{\mathbb{K}[X]_{f^*b}}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f|_{X_{f^*b}}: X_{f^*b} \to Y_b$ è un isomorfismo. $\square$

Sia $f: X \dashrightarrow Y$ che non è un morfismo.

Sia (U, φ) un rappresentante di f. $\Gamma_\varphi \subseteq U \times Y$, $\overline{\Gamma_\varphi} \subseteq X \times Y$.

$\tilde{X} = \overline{\Gamma_\varphi} \subseteq X \times Y$.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & Y \\
X \arrow[ur, dashed, "f"']
\end{tikzcd}$$

. $\tilde{X}$ è irr. perché chiusura di $\Gamma_\varphi \cong U$ irr..

p è un morfismo birazionale, q è un morfismo.

Es.: $\pi: \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$, $(x,y) \mapsto [x,y]$. $U = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\Gamma = \{((x,y), [s,t]) \mid (x,y) \neq (0,0),\ xt - ys = 0\} \subseteq U \times \mathbb{P}^1$.

$\overline{\Gamma} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$

$\mathbb{A}^2_{x,y} \times \mathbb{P}^1_{s,t} \supseteq Z = \{xt - ys = 0\}$ è chiuso. $Z \cap (U \times \mathbb{P}^1) = \Gamma \Rightarrow \overline{\Gamma} \subseteq Z$.

$Z - \Gamma = \{(0,0)\} \times \mathbb{P}^1 =: E$ curva eccezionale. Faccio vedere che tutti i punti di E stanno in $\overline{\Gamma}$. Sia $f(x,y,s,t)$ t.c. $V(f) \supseteq \Gamma$.

Fisso $(a,b) \neq (0,0)$, $\chi: \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$, $t \mapsto ((ta, tb), [a,b])$.

$t \neq 0 \Rightarrow \chi(t) \in \Gamma \Rightarrow f(ta, tb, a, b) = 0\ \forall t \neq 0 \Rightarrow\ = 0\ \forall t \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0,0,a,b) = 0 \Rightarrow ((0,0),[a,b]) \in V(f)\ \forall f \Rightarrow ((0,0),[a,b]) \in \overline{\Gamma} \Rightarrow$

$\Rightarrow E \subseteq \overline{\Gamma} \Rightarrow \overline{\Gamma} = Z = \{xt - ys = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$

$\| \; \widehat{\mathbb{A}}^2$, scoppiamento (blow up) di $\mathbb{A}^2$ in $(0,0)$.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{A}}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathbb{P}^1 \\
\mathbb{A}^2 \arrow[ur, dashed, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

, $\varepsilon^{-1}: U \to \widehat{\mathbb{A}}^2$, $(x,y) \mapsto ((x,y),[x,y])$,

$\varepsilon^{-1}((0,0)) = E$.