Scoppiamento di $\mathbb{A}^2$ in $(0,0)$:

$$\pi: \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \quad \text{(non è un morfismo)}$$
$$(x,y) \longmapsto [x,y]$$

$$W = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \begin{matrix} \Gamma & \subseteq & W \times \mathbb{P}^1 \\ \cap\!\shortmid & & \cap\!\shortmid \\ \overline{\Gamma} & \subseteq & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \end{matrix}$$

Abbiamo visto $\underbrace{\hat{\mathbb{A}}^2}_{\text{scoppiamento}} := \overline{\Gamma} = \{((x,y),[s,t]) \mid xt - ys = 0\}$

$$\begin{tikzcd} \hat{\mathbb{A}}^2 \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathbb{P}^1 \\ \mathbb{A}^2 \arrow[ur, dashed, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

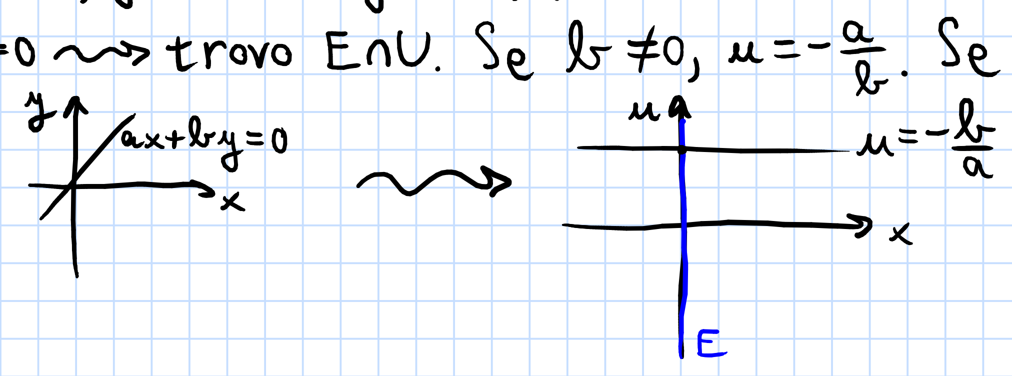
q morfismo, ε morfismo birazionale,
$\varepsilon_{|\varepsilon^{-1}(W)}: \varepsilon^{-1}(W) \to W$ è iso.,
$\varepsilon^{-1}(0,0) = \{(0,0)\} \times \mathbb{P}^1 =:$ "curva eccezionale".

$\underset{\{s\neq 0\}}{U}, \underset{\{t \neq 0\}}{V} \subseteq \hat{\mathbb{A}}^2$ sono aperti e $\hat{\mathbb{A}}^2 = U \cup V$.

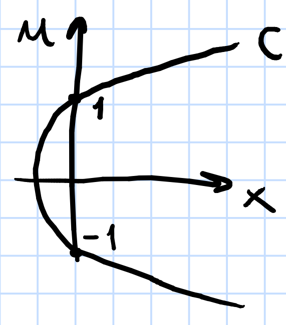
Su U ho la coordinata affine $u = t/s$, quindi $y = x \cdot u$, $U \underset{\text{dato da } u,x}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{A}^2$; su V, $v = \frac{s}{t}$, $x = v \cdot y$, $V \underset{\text{dato da } v,y}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{A}^2$; su $U \cap V$, $u = \frac{1}{v}$.

Sia $\{f(x,y) = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2$ curva $\ni (0,0)$. $\varepsilon^{-1}(f) = E \cup C'$, $C' =$ "trasformata stretta".

Sia $f(x,y) = ax + by$. $\varepsilon^{-1}(f) \cap U$: $f(x, xu) = ax + bxu = x\overbrace{(a+bu)}^{\text{trasformata stretta}}$.
$x = 0 \rightsquigarrow$ trovo $E \cap U$. Se $b \neq 0$, $u = -\frac{a}{b}$. Se $b = 0$, uso V.

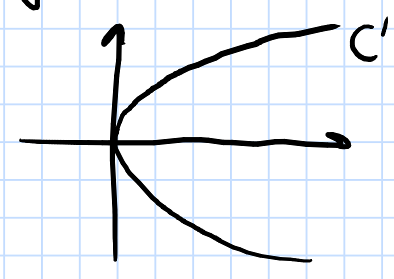


$f(x,y) = y^2 - x^2(x+1)$. $\varepsilon^{-1}(f) \cap U$: $x^2u^2 - x^2(x+1) = x^2\overbrace{(u^2 - x - 1)}^{\text{trasformata stretta} = C'}$



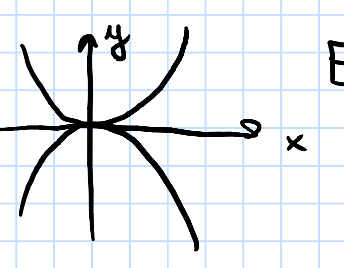
è liscia $C' \to C$,
$\varepsilon'_{|C'}: C' \to C$ è morfismo birazionale.
↳ "desingolarizzazione"

$f(x,y) = y^2 - x^3$: $f(x, xu) = x^2\overbrace{(u^2 - x)}^{C'}$.



Se C ha un pto m-plo ordinario in $(0,0)$:
$f(x,y) = \prod_{i=1}^{m}(a_i x + b_i y) +$ termini di ordine superiore, $[a_i, b_i]$ distinti (ordinario), WLOG $b_i \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, m$.
$(\varepsilon^{-1}(f=0)) \cap U = \left\{ x^m \left(\prod_{i=1}^{m}(a_i + b_i u) + x(\cdots) \right) = 0 \right\}$,
$E \cap C' \cap U = \left\{ \left(0, -\frac{a_i}{b_i}\right), i = 1, \dots, m \right\}$.

$y^2 - x^4$ (tacnodo):



Ex.: descrivere la trasformata stretta.

$\hat{\mathbb{A}}^2$ è una varietà proiettiva?
$\varepsilon^*: \mathbb{K}[x,y] \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{\mathbb{A}}^2}(\hat{\mathbb{A}}^2)$. Ex.: ε^* è iso. $\Rightarrow \hat{\mathbb{A}}^2$ NON è proiettiva (ci sono funzioni regolari non costanti).
$\hat{\mathbb{A}}^2$ è affine? No. Ricordiamo: X affine, $P, Q \in X$, $P \neq Q \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists f \in \mathbb{K}[X]$ t.c. $f(P) \neq f(Q)$.
Sia $f \in \mathcal{O}_{\hat{\mathbb{A}}^2}(\hat{\mathbb{A}}^2)$. $f_{|E}$ è regolare, $E \cong \mathbb{P}^1 \Rightarrow f_{|E}$ è costante $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ le funzioni regolari su $\hat{\mathbb{A}}^2$ non separano i pti di $E \Rightarrow$
$\Rightarrow \hat{\mathbb{A}}^2$ non è affine.

Grassmaniana

$$Gr(k,n) = \{V \subseteq \mathbb{K}^n \text{ sottospazio} \mid \dim V = k\}$$
$$\updownarrow 1:1$$
$$\{H \subseteq \mathbb{P}^{n-1} \text{ sottospazio} \mid \dim H = k-1\}.$$

Teo.: $Gr(k,n)$ ha una struttura di varietà proiettiva.
Es.: $Gr(1,n) = \mathbb{P}^n$, $Gr(n-1,n) = (\mathbb{P}^n)^* = \mathbb{P}((\mathbb{K}^n)^*)$.
$Gr(2,4)$? $H \in Gr(2,4)$, coordinate di Plücker: siano $v_1, v_2 \in H$ generatori, $M = (v_1 | v_2) \in \mathcal{M}(4 \times 2)$.
$0 \leq i < j \leq 3$, $P_{ij}(M) = \det(\underbrace{M_{ij}}_{\text{matrice } 2\times 2 \text{ data dalle righe } i \text{ e } j})$. Sia $M' \in \mathcal{M}(4,2)$ che descrive H (come M).
Allora $\exists g \in GL(2)$ t.c. $M' = Mg$. $P_{ij}(M') = P_{ij}(M)\det(g) \Rightarrow$
$\Rightarrow [P_{ij}(H)] \in \mathbb{P}^5$ è un ben def. pto.

$$P: Gr(2,4) \longrightarrow \mathbb{P}^5 \quad \text{è una mappa di insiemi,}$$
$$H \longmapsto [P_{ij}(H)]$$

immersione di Plücker.
Chiamo z_{ij} le coordinate su $\mathbb{P}^5$.
$P^{-1}(\{z_{0j} \neq 0\}) \subseteq Gr(2,4)$
$\quad \shortparallel$
$\{H \mid P_{01}(H) \neq 0\}$. $P_{01}(H) \neq 0 \Rightarrow \exists!$ rappresentazione
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $H \longmapsto (a,b,c,d)$ è una bigezione tra $\{H \mid P_{01}(H) \neq 0\}$ e $\mathbb{A}^4$.
$P_{01}(M) = 1$, $P_{02}(M) = b$, $P_{03}(M) = d$, $P_{12}(M) = -a$, $P_{13}(M) = -c$, $P_{23}(M) = ad - bc$.

$$f_{01}: \mathbb{A}^4 \to \mathbb{A}^5 = \{z_{01} \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^5$$
$$(a,b,c,d) \longmapsto (b, d, -a, -c, ad - bc) \quad \text{è iniettiva.}$$

$\mathrm{Im}\, f_{01} = \{P_{23} = -P_{12}P_{03} + P_{02}P_{13}\}$ è chiusa. Lo stesso vale $\forall 0 \leq i < j \leq 3$.
Allora $\mathrm{Im}\, P$ è chiusa e P è iniettiva.
$\mathrm{Im}\, P$ ha equazione $P_{01}P_{23} + P_{12}P_{03} - P_{02}P_{13} = 0$, quadrica di Klein.

Caso generale: $Gr(k,n) \ni H$. Rappresento H con $M \in \mathcal{M}(n \times k)$ le cui colonne sono una base di H. $\forall 0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$
$P_{i_1,\dots,i_k} = \det(M_{i_1,\dots,i_k})$. Se anche M' rappresenta H, $\exists g \in GL(k)$ t.c. $M' = Mg \Rightarrow P_{i_1,\dots,i_k}$ sono definite a meno di moltiplicazione per $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

$$P: Gr(k,n) \longrightarrow \mathbb{P}^N \quad (N+1 = \tbinom{n}{k}) \quad \text{immersione di Plücker.}$$
$$H \longmapsto [P_{i_1,\dots,i_k}(H)]$$

Se $P_{0,1,\dots,k-1}(H) \neq 0$, H è rappresentato da
$\overbrace{\left(\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline A \end{array}\right)}^{k}\begin{matrix} \}k \\ \}n-k \end{matrix}$. $H \mapsto A$ dà una bigezione con $\mathbb{A}^{k(n-k)}$.
Le entrate di A sono coordinate $P_{0,1,\dots,\hat{i},\dots,k-1,j}(M)$.
$\mathbb{A}^{k(n-k)} \longrightarrow \mathbb{A}^N$ indotta dalla mappa di Plücker è iniettiva e l'immagine è il chiuso di $\mathbb{A}^N$ definito dalle relazioni che danno le coordinate di Plücker "generali" in termini delle entrate di A.

$V = \mathbb{K}^n$, $H \in Gr(k,V)$, $H = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.
$P(H) = [v_1 \wedge \dots \wedge v_k] \in \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ immersione di Plücker.
Sia $T \in \Lambda^k V$, $L_T: V \to \Lambda^{k+1} V$, $v \mapsto v \wedge T$. Vale: $\mathrm{rk}\, L_T \geq n - k$ e c'è l'= se e solo se T è un tensore semplice.
Se T è semplice, $\mathrm{Ker}\, L_T = H$.

$$\begin{tikzcd} P^{-1}(z_{i_1,\dots,i_k} \neq 0) \arrow[r, "1:1"] \arrow[d, "P"] & \mathbb{A}^{k(n-k)} \arrow[d, "\text{isomorfismo}"] \\ \mathbb{P}^N & \mathbb{A}^N \cap \mathrm{Im}\, P \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

$Gr(k,n)$ è ricoperta da $\binom{n}{k}$ aperti $U_{i_1,\dots,i_k} \cong \mathbb{A}^{k(n-k)}$.