Gruppi algebrici

Un gruppo algebrico è una varietà q.p. G con una struttura di gruppo t.c. $G\times G \to G$, $(x,y)\mapsto xy$; $G\to G$, $x\mapsto x^{-1}$ sono morfismi.

Es.: (1) $(\mathbb{K},+)=\mathbb{G}_a$ "gruppo additivo"

$(\mathbb{K}^*,\cdot)=\mathbb{G}_m$ "gruppo moltiplicativo"

(2) C cubica piana liscia

(3) G_1, G_2 gruppi algebrici $\Rightarrow G_1\times G_2$ g.a. (ex.)

(4) $GL(m)=\{\det(M)\neq 0\}\subseteq \mathcal{M}(m\times m)=\mathbb{A}^{m^2}$ aperto principale, quindi affine:

$$GL(m)\times GL(m)\longrightarrow GL(m);$$
$$(A,B)\longmapsto AB$$

AB ↳ coord. pol. nelle coord. di A e di B $\Rightarrow$ morfismo

simile per l'inversa $(A\mapsto (A^*)^T\frac{1}{\det A})$

(5) $SL(m)$ (in generale, i sottogruppi),

$T(m)$ triangolari superiori invertibili,

Q forma bilineare su $\mathbb{K}^m$, $O(Q)$ gruppo ortogonale

(6) $\mathbb{P}GL(m)=GL(m)/\langle\lambda\mathrm{Id}\rangle\subseteq\mathbb{P}^{m^2-1}$:

$$\mathbb{P}GL(m)\times\mathbb{P}GL(m)\longrightarrow\mathbb{P}GL(m);$$
$$([A],[B])\longmapsto[AB]$$

$[AB]$ ↳ biomogenea di bigrado $(1,1)\Rightarrow$ morfismo

e l'inversa? Si può fare $[A]\mapsto[(A^*)^T]$ data da pol. omogenei di grado $m-1$ nelle coord. di A.

$\mathbb{P}GL(m)=\mathbb{P}^{m^2}-\{\det A=0\}$ è affine.

G gruppo algebrico, X var. q.p., dico che G agisce su X se ho un'azione $G\times X\to X$ che è un morfismo.

Es.: - azione di G su G per coniugio o moltiplicazione a sinistra

- $GL(m)$ agisce su $\mathbb{A}^m$
- $\mathbb{P}GL(m)$ agisce su $\mathbb{P}^{m-1}$
- $GL(m)$ agisce su $Gr(k,m)$:

$A\in GL(m)$, $H\subseteq\mathbb{K}^m$, $AH=A(H)$; questa azione è un morfismo:

$H\longleftrightarrow M$ matrice $m\times k$

$AH\longleftrightarrow AM$; le righe di AM sono combinazioni lineari delle righe di M a coefficienti le entrate di A. Le coordinate di Plücker di AH sono espressioni $\sum q_{i_1,\dots,i_k}(A)\,P_{i_1,\dots,i_k}(H)$.

↳ pol. omogeneo di grado k

$H_0\in Gr(k,m)$ fissato, $\varphi: GL(m)\to Gr(k,m)$ è un morfismo suriettivo. $GL(m)$ è irr. ($\underset{A}{\text{aperto}}$ $\underset{AH_0}{\text{in}}$ $\mathbb{A}^{m^2}$) $\Rightarrow Gr(k,m)$ irr..

Famiglia universale

$\mathcal{U}=\{(H,v)\mid v\in H\}\subseteq Gr(k,m)\times\mathbb{K}^m$. $\mathcal{U}$ è chiuso.

$\downarrow p$

$Gr(k,m)$, $H\in Gr(k,m)$, $p^{-1}(H)=H\subseteq\mathbb{K}^m$.

Es.: $Gr(2,4)=\{\text{rette in }\mathbb{P}^3\}$. $I=\{(l,m)\mid l\cap m\neq\emptyset\}\subseteq Gr(2,4)\times Gr(2,4)$ è chiuso: $l\leftrightarrow L$, $m\leftrightarrow M$, la condizione è $\det(L|M)=0$.

Mi serve in termini delle coord. di Plücker. Come si sistema?

Due modi:

1) carte: copro $Gr(2,4)$ con gli aperti $U_{ij}=\{P_{ij}\neq 0\}$ $i<j$, il prodotto lo copro con le coppie $\underset{\mathbb{A}^4}{\overset{\wr\wr}{U_{ij}}}\times\underset{\mathbb{A}^4}{\overset{\wr\wr}{U_{rh}}}$. Ad esempio, su $U_{12}\times U_{34}$ ho

$L=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$ e $\det(L|M)=0$ è condizione pol. sulle coordinate affini.

I è chiuso perché $I\cap(U_{ij}\times U_{rh})$ è chiuso $\forall i<j, r<h$;

2) $J=\{(l,m,p)\mid {p\in l \atop p\in m}\}\subseteq Gr(2,4)\times Gr(2,4)\times\mathbb{P}^3$

$\downarrow p$ $\qquad\qquad\downarrow p$

$I \longleftarrow\!\!\!\!\supset\longrightarrow Gr(2,4)\times Gr(2,4)$

p morfismo definito su var. proiettiva, se J è chiuso $p(J)=I$ è chiuso. Si verifica che J è chiuso.

Basi di trascendenza

$\mathbb{K}$ campo fissato, $F/\mathbb{K}$ estensione. $a_1,\dots,a_n\in F$ sono algebricamente dipendenti su $\mathbb{K}$ se $\exists\ 0\neq p(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{K}[t_1,\dots,t_n]$ t.c. $p(a_1,\dots,a_n)=0$.

$S\subseteq F$ è indipendente se ogni sottoinsieme finito di S è indi..

Una base di trascendenza $\mathcal{B}$ di F su $\mathbb{K}$ è un sottoinsieme indi. massimale.

Oss.: $\mathcal{B}$ è base di trascendenza $\Leftrightarrow\mathcal{B}$ è indi. e $F/\mathbb{K}(\mathcal{B})$ è algebrica.

Se $F/\mathbb{K}$ è finit. gen.:

(a) dati $b_1,\dots,b_k$ generatori di F su $\mathbb{K}$ $\exists$ base di trascendenza $\mathcal{B}\subseteq\{b_1,\dots,b_k\}$. Infatti, sia WLOG $b_1,\dots,b_r$ sottoinsieme indi. massimale, $F/\mathbb{K}(b_1,\dots,b_r)$ è generata da $b_{r+1},\dots,b_k$ che sono algebrici su $\mathbb{K}(b_1,\dots,b_r)\Rightarrow F/\mathbb{K}(b_1,\dots,b_r)$ è algebrica (finita);

(b) ogni base di trascendenza di $F/\mathbb{K}$ è finita. Infatti, siano $c_1,\dots,c_s$ generatori di $F/\mathbb{K}$, $\mathcal{B}$ base di trasc.. $c_1,\dots,c_s$ sono algebrici su un sottoinsieme finito $\mathcal{B}'\subset\mathcal{B}$ e $F/\mathbb{K}(\mathcal{B}')$ è algebrica $\overset{\text{oss.}}{\Rightarrow}\mathcal{B}'$ base.

(c) $\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2$ basi di trasc. $\Rightarrow\#\mathcal{B}_1=\#\mathcal{B}_2$. Infatti, siano $\mathcal{B}_1=\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$, $\mathcal{B}_2=\{\beta_1,\dots,\beta_m\}$. $\exists\ p$ pol. t.c. $p(\alpha_1,\beta_1,\dots,\beta_m)=0$. Se WLOG β_1 compare nel pol., considero $\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_m$. $F/\mathbb{K}(\alpha_1,\beta_2,\dots,\beta_m)$ è algebrica. Itero il procedimento. Trovo $n\leq m$. Analogamente, $m\leq n$.

Def.: il grado di trascendenza di F su $\mathbb{K}$ è il numero di elementi di una qualunque base, $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}F$.

Def.: X var. q.p. irr., $\dim:=\operatorname{trdeg}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}(X)$

↳ estensione finit. gen.

Es.: • $\mathbb{K}(\mathbb{P}^n)\cong\mathbb{K}(\mathbb{A}^n)=\mathbb{K}(t_1,\dots,t_n)\Rightarrow\dim\mathbb{P}^n=\dim\mathbb{A}^n=n$;

• $\dim(Gr(k,m))=\dim(\mathbb{A}^{k(m-k)})=k(m-k)$ perché contiene un aperto $\cong\mathbb{A}^{k(m-k)}$.