$f\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m,y]$ irr., $\deg_y f>0$.

$X=V(f)\subseteq\mathbb{A}^{m+1}$.

$\mathbb{K}(X)\cong\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)[y]/(f)\Rightarrow x_1,\dots,x_m$ sono una base di trasc..
Infatti sono indi. e $\mathbb{K}(X)\supseteq\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)$ è estensione algebrica $\Rightarrow$
$\Rightarrow\dim V(f)=m$.

Oss.: se $F\in\mathbb{K}[x_0,x_1,\dots,x_{m+1}]_d$ è irr., $\dim \overset{\substack{X\subseteq\mathbb{P}^{m+1}\\ \|}}{V(F)}=m$. Se $F\neq x_0$, $U=X\cap\mathbb{A}^{m+1}=V(f)$, $f=F(1,x_1,\dots,x_m)$. $\dim X=\dim U=m$.

Prop.: X var. irr., $\dim X=m$. $\exists f\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m,y]$ irr. t.c. $X\sim_{bir}V(f)\subseteq\mathbb{A}^{m+1}$.

Dim. (per char $\mathbb{K}=0$): $\mathbb{K}(X)\ni t_1,\dots,t_m$ base di trasc.

$\mathbb{K}(X)\supseteq\mathbb{K}(t_1,\dots,t_m)$ estensione algebrica finita

Teo. dell'elemento primitivo: $\exists z\in\mathbb{K}(X)$ t.c. $\mathbb{K}(X)=\mathbb{K}(t_1,\dots,t_m)[z]$.
Sia p il pol. minimo di z su $\mathbb{K}(t_1,\dots,t_m)$.

$\mathbb{K}(X)=\mathbb{K}(t_1,\dots,t_m)[y]/(p(y))$.

$p(y)=y^k+a_{k-1}y^{k-1}+\dots+a_0$, $a_i\in\mathbb{K}(t_1,\dots,t_m)\Rightarrow\exists b\in\mathbb{K}[t_1,\dots,t_m]$ t.c. $f=bp\in\mathbb{K}[t_1,\dots,t_m][y]$ primitivo $\Rightarrow f$ irr.

$\mathbb{K}(X)=\mathbb{K}(t_1,\dots,t_m)[y]/(f)=\mathbb{K}(Y)$, $Y=V(f)\subseteq\mathbb{A}^{m+1}\Rightarrow$
$\Rightarrow X\sim_{bir}Y$. □

Proprietà della dimensione:

(1) $\dim X$ è un invariante bir.;

(2) se $f:X\dashrightarrow Y$ raz. dominante, X,Y irr., ho $f^*:\mathbb{K}(Y)\to\mathbb{K}(X)$ iniettivo e $\mathbb{K}$-lineare $\Rightarrow$ se $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{K}(Y)$ sono alg. indi., anche $f^*z_1,\dots,f^*z_n$ lo sono $\Rightarrow\dim Y\leq\dim X$;

(3) X,Y irr., $\dim X=m$, $\dim Y=n$, $X\times Y$ è irr. (già visto) e $\dim X\times Y=m+n$: suppongo X,Y chiusi affini, $X\subseteq\mathbb{A}^N_x$, $Y\subseteq\mathbb{A}^M_y$ (WLOG posso farlo a meno di sostituire con aperti affini di X e Y).
Inoltre posso supporre che $x_1,\dots,x_m$ e $y_1,\dots,y_n$ inducano basi di trasc. di $\mathbb{K}(X)$ e $\mathbb{K}(Y)$ rispettivamente.
$\mathbb{K}(X\times Y)\supseteq\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$ è estensione algebrica: infatti, $x_i\in\mathbb{K}(X)$ è algebrico su $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)$ $\forall\, i=1,\dots,N\Rightarrow$
$\Rightarrow x_1,\dots,x_N$ sono algebriche su $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$, lo stesso vale per $y_1,\dots,y_M$. $X\times Y\subseteq\mathbb{A}^N\times\mathbb{A}^M\Rightarrow$
$\Rightarrow x_i,y_j$ generano $\mathbb{K}(X\times Y)$. Per concludere, mostro $x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n$ alg. indi.. Sia $Q(x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}[x,y]$ t.c. $V(Q)\supseteq X\times Y$.
$Q(x,y)=\sum_{I\text{ multiindici}}\alpha_I(x)y^I$, $\alpha_I\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m]$.
Sia $P=(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_N)\in X$, ho $Q(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m,y_1,\dots,y_n)=0$ su Y.
Dato che $y_1,\dots,y_n$ sono alg. indi. su Y, $\alpha_I(P)=0\ \forall I$.
Per arbitrarietà di P, $\alpha_I(x_1,\dots,x_m)=0$ su X $\forall I\Rightarrow\alpha_I=0$ perché $x_1,\dots,x_m$ sono indi. su $X\Rightarrow Q=0$.

X var., $\dim X=n$.

Def.: X è razionale se $\exists f:\mathbb{P}^n\dashrightarrow X$ isomorfismo birazionale.
X è unirazionale se $\exists f:\mathbb{P}^n\dashrightarrow X$ dominante.

Equivalentemente, X razionale $\Longleftrightarrow\mathbb{K}(X)\cong\mathbb{K}(t_1,\dots,t_n)$,
X unirazionale $\Longleftrightarrow\exists\ \mathbb{K}(X)\hookrightarrow\mathbb{K}(t_1,\dots,t_n)$.

Es.: $C\subseteq\mathbb{P}^2$ curva liscia di grado d; $d=1,2\Rightarrow C\cong\mathbb{P}^1$, quindi raz.;
$d\geq3$: C non è uniraz..

Teorema (Lüroth): C curva (var. irr. di $\dim=1$), C uniraz. $\Rightarrow$ C raz.. Dim.: no. □

Problema di Lüroth: X irr. uniraz., X è raz? Risposta:
$n=1$ sì, $n=2$ sì se $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$, char $\mathbb{K}=0$. Se $\mathbb{K}=\mathbb{C}$:
$n=3$, $X=V(F_3)\subseteq\mathbb{P}^4$, $F_3\in\mathbb{K}[x_0,\dots,x_4]_3$, X liscia. X è uniraz. ma non raz..
$n=4$: $V(F_3)=X\subseteq\mathbb{P}^5$ liscia, "cubic 4-fold", è uniraz., "spesso" è raz., non si sa se lo è sempre.

Torniamo alla dimensione.

Prop.: X irr., $Y\subseteq X$ chiuso irr.. (1) $\dim Y\leq\dim X$. (2) $=\Longleftrightarrow X=Y$.

Dim.: a meno di passare a un aperto affine opportuno, posso supporre X affine. Ho $Y\subseteq X\subseteq\mathbb{A}^N$. Sia $x_1,\dots,x_m$ una base di trasc. di Y fatta di coordinate. $\mathbb{K}[X]\twoheadrightarrow\underset{x_1,\dots,x_m}{\underset{\Psi}{\mathbb{K}[Y]}}$. Se $x_1,\dots,x_m$ sono indi. su Y, a maggior ragione lo sono su $X\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (1). (2): se $\dim X=\dim Y=m$, posso supporre che le coordinate $x_1,\dots,x_m$ diano una base di trasc. sia su X che su Y.
Se $Y\subsetneq X$, $\exists\,0\neq f\in I_X(Y)\subseteq\mathbb{K}[X]\Rightarrow f$ è alg. su $\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)\Rightarrow$
$\Rightarrow\exists\, p(x_1,\dots,x_m,y)\in\mathbb{K}(x_1,\dots,x_m)[y]$ t.c. $p(x_1,\dots,x_m,f)=0$.
A meno di moltiplicare per $b\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m]$, posso supporre $p=a_0y^d+a_1y^{d-1}+\dots+a_d$, $a_i\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m]$. Posso supporre $a_d\neq0$.
$p(x_1,\dots,x_m,f)=0$ in $\mathbb{K}[X]\Rightarrow a_d(x_1,\dots,x_m)=0$ in $\mathbb{K}[Y]$, assurdo. □

Cor.: $X\subseteq\mathbb{A}^{m+1}$ (o $\mathbb{P}^{m+1}$) chiuso irr., $\dim X=m\Rightarrow X$ ipersuperficie.

Dim. (caso $X\subseteq\mathbb{A}^{m+1}$): $\dim X=m\Rightarrow I(X)\ni f\neq0$, cioè $X\subseteq V(f)$.
Siano $p_1,\dots,p_k$ i fattori irr. di f. $V(f)=V(p_1)\cup\dots\cup V(p_k)$ decomposizione in irr. di $V(f)$. $X=X\cap V(f)=(X\cap V(p_1))\cup\dots\cup(X\cap V(p_k))$ unione finita di chiusi, X irr. $\Rightarrow\exists\ i$ t.c. $X\cap V(p_i)=X$, cioè $X\subseteq V(p_i)$.
$\dim X=\dim V(p_i)=m$ e sono chiusi irr. $\Rightarrow X=V(p_i)$. □

Dimensione topologica

X irr., topdim $X:=\sup\{n\mid\exists\ \emptyset\neq X_0\subsetneq X_1\subsetneq\dots\subsetneq X_n\subseteq X$ catena di chiusi irr.$\}$.

Es.: topdim $X=0\Longleftrightarrow X=\{\text{pto}\}$.

Cor.: X irr. $\Rightarrow$ topdim $X\leq\dim X$.

Es.: $\mathbb{A}^n$ e $\mathbb{P}^n$ hanno topdim $=n$.