Se X è affine, $X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_r$ catena di chiusi irr. $\overset{\text{NSS}}{\Longleftrightarrow}$
$\Longleftrightarrow P_0 \supsetneq P_1 \supsetneq \dots \supsetneq P_r$ catena di ideali primi propri di $\mathbb{K}[X]$. Allora topdim X = dimensione di Krull di $\mathbb{K}[X]$.

Teo.: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ irr., $\dim X = n$, $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]_d$ t.c. $V(F) \not\supseteq X$.
Allora $X \cap V(F)$ ha dim pura $= n-1$. Dim.: no. $\square$
$\hookrightarrow$ tutte le componenti irr. hanno $\dim = n-1$

Nota: X var. q.p., $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ decomposizione in irr., $\dim(X) := \max\{\dim X_i\}$.

Cor.: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ var. q.p. irr., $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]_d$, $V(F) \not\supseteq X$. Allora
$X \cap V(F) = \emptyset$ o $X \cap V(F)$ ha dim pura $= n-1$.
Dim.: $X \cap V(F) \neq \emptyset \Rightarrow X \cap V(F) \subset \underbrace{\overline{X}}_{\text{chiusura proiettiva}} \cap V(F) = \underbrace{W_1 \cup \dots \cup W_r}_{\text{tutti irr. di } \dim = n-1}$.
Se $X \cap V(F) \cap W_i \neq \emptyset$, $X \cap V(F)$ è denso in W_i. $\square$

Cor.: $F_1, \dots, F_k \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ omogenei. Allora $\dim V(F_1) \cap \dots \cap V(F_k) \geq n-k$.
Se $k \leq n$, $V(F_1) \cap \dots \cap V(F_k) \neq \emptyset$. Dim.: dal teo.. $\square$

Es.: $C_3 = \left\{ \mathrm{rk}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \leq 1 \right\} \subseteq \mathbb{P}^3$.
$V(x_0 x_2 - x_1^2) \cap V(x_0 x_3 - x_2 x_1) = C_3 \cup \{x_0 = x_1 = 0\}$.

Cor.: $X \subseteq \mathbb{P}^N$ var. q.p. irr. $\Rightarrow \dim X = $ topdim X.
Dim.: induzione su $\dim X$. $n=0$ ok. $n-1 \Rightarrow n$: mi basta una catena di chiusi di X di lunghezza n. Scelgo $p \in X$ e $H \subseteq \mathbb{P}^N$ iperpiano t.c. $p \in H$, $H \not\supseteq X$, $X \cap V(H) \neq \emptyset \Rightarrow X \cap V(H)$ ha dim pura $n-1$. Se Y è una componente (irr.) di $H \cap X$, $\emptyset \neq Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_{n-1} = Y$ catena di chiusi irr., ci aggiungo X. $\square$

Teo.: X, Y var. proiettive irr., $f: X \to Y$ morfismo suri.. $\dim X = n$, $\dim Y = m$.
(1) $\forall y \in Y$, ogni comp. irr. di $f^{-1}(y)$ ha $\dim \geq n-m$;
(2) $\exists\, U \subseteq Y$ aperto $\neq \emptyset$ t.c. $f^{-1}(y)$ ha dim. pura $n-m$ $\forall y \in U$. Dim.: no. $\square$

Cor.: $y \mapsto \dim f^{-1}(y)$ è semicontinua superiormente.
Dim.: $Z_k = \{y \in Y \mid \dim f^{-1}(y) \geq k\}$, induzione su $m = \dim Y$. $m=0$ ok.
Suppongo l'enunciato vero per $s < m$. Devo mostrare Z_k chiuso $\forall k$.
Se $k \leq n-m$, da (1) del teo. $Z_k = Y$. Se $k > n-m$, da (2) $Z_k \subseteq X \setminus U = W$.
$W \subsetneq Y$ è chiuso. Decompongo in irr. $W = W_1 \cup \dots \cup W_t$. $X_i = f^{-1}(W_i)$,
$f_i = f|_{X_i}: X_i \to W_i$. Decompongo in irr. $X_i = \bigcup X_{ij}$, $f_{ij}: X_{ij} \to W_i$.
Z_k è unione dei vari $Z_{k,ij}$ per i morfismi f_{ij}. Per l'ipotesi induttiva, sono chiusi $\Rightarrow Z_k$ chiuso. $\square$

Es.: $\widehat{\mathbb{P}}^2 = \{([x_0, x_1, x_2], [s,t]) \mid t x_1 - s x_2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, $\varepsilon^{-1}(p)$ è un punto se $p \neq [1,0,0]$, è $\{p\} \times \mathbb{P}^1$ se $p = [1,0,0]$.
$\widehat{\mathbb{P}}^2 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{P}^2$

Es.: $f: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[s,t] \mapsto [s^m, t^m]$, $m \geq 2$ intero. Se $p \in \mathbb{P}^1$, $p \neq [0,1], [1,0]$, $f^{-1}(p)$ ha cardinalità m ($\Rightarrow$ riducibile).

Prop.: X, Y proiettive, Y irr., $f: X \to Y$ morfismo suri.. $\forall y \in Y$, $f^{-1}(y)$ è irr. di $\dim = t$. Allora X è irr. e $\dim X = \dim Y + t$.
Dim.: $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ deco. in irr.. Suppongo $X_1, \dots, X_s$ dominano Y, $X_{s+1}, \dots, X_k$ no. Dato che $f(X_i)$ è chiuso $\forall i$ e Y è irr., allora $f(X_1) = \dots = f(X_s) = Y$. Chiamo $Z = \bigcup_{i=s+1}^{k} f(X_i)$. Considero $f_i = f|_{X_i}: X_i \to Y$, $1 \leq i \leq s$. Teo. $\Rightarrow \exists\, U_i \subseteq Y$ aperto t.c. $\forall y \in U_i$ $f_i^{-1}(y)$ ha dim pura $= n_i - \dim Y$, dove $n_i = \dim X_i$.
$U = \left(\bigcap_{i=1}^{s} U_i\right) \cap (Y \setminus Z)$ è aperto $\neq \emptyset$. Sia $\bar{y} \in U$. $\underbrace{f^{-1}(\bar{y})}_{\text{irr. di } \dim = t} = \bigcup_{i=1}^{s} \underbrace{f_i^{-1}(\bar{y})}_{\text{chiusi}} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ WLOG $f^{-1}(\bar{y}) = f_1^{-1}(\bar{y}) \overset{\text{Teo.}}{\Longrightarrow} \dim X_1 = \dim Y + t$.
Prendo y qualunque: $\underbrace{f_1^{-1}(y)}_{\substack{\text{tutte le componenti hanno} \\ \dim \geq t}} \subseteq \underbrace{f^{-1}(y)}_{\text{irr. di } \dim = t} = \bigcup_{i=1}^{k} f_i^{-1}(y) \Rightarrow f_1^{-1}(y) = f^{-1}(y)\ \forall y \in Y \Rightarrow$
$\Rightarrow X = X_1 \Rightarrow$ tesi. $\square$

Applicazione: $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d)$, $N = \binom{n+d}{d} - 1$, $d \geq 2$.
$\Sigma = \{(P, [F]) \mid P$ è singolare in $[F]\} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$. Σ è chiuso (già visto).

$$\begin{tikzcd} & \Sigma \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \mathbb{P}^n & & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

proiezioni, $\Delta := q(\Sigma)$ (ipersuperfici singolari) è chiuso.
Considero $p: \Sigma \to \mathbb{P}^n$. $\bar{P} = [1, 0, \dots, 0]$, $F \in p^{-1}(\bar{P}) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow F$ non contiene i monomi $x_0^d, x_0^{d-1} x_1, \dots, x_0^{d-1} x_n$,
cioè $p^{-1}(\bar{P}) \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$.

Considero $PGL(n+1) =: G$ agisce su $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}^N$, quindi agisce diagonalmente su $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$ e manda Σ in se stesso. Infine, l'azione di G su $\mathbb{P}^n$ è transitiva $\Rightarrow$
$\Rightarrow Q \in \mathbb{P}^n$, $g \in G$ t.c. $g(Q) = \bar{P}$, allora $g(p^{-1}(Q)) = p^{-1}(\bar{P}) \Rightarrow p^{-1}(Q) \cong \mathbb{P}^{N-n-1}$ $\forall Q \in \mathbb{P}^n$.
Applicando la prop. a p, Σ irr. e $\dim \Sigma = N - n - 1 + n = N - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim \Delta \leq N-1 \Rightarrow \Delta \subsetneq \mathbb{P}^N$.
Mostro $\dim \Delta = N-1$ (Δ è irr. perché immagine di Σ irr.).
Sia $F_0(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n-1}]_d$ t.c. $[F_0]$ è liscia.
Considero $F_0 \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d$, è singolare solo in $[0, \dots, 0, 1] \Rightarrow$
$\Rightarrow [F_0] \in \Delta$, $q^{-1}([F_0])$ è un punto. Per (1) del teo. applicato a $q: \Sigma \to \Delta$, ho $\dim \Delta = \dim \Sigma \Rightarrow \Delta$ è ipersuperficie di $\mathbb{P}^N$, detta discriminante.