Spazio tangente e punti singolari

Caso affine: $X \subseteq \mathbb{A}^N$ chiuso irr., $P \in X$.

Notazione: $f \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^N]$, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\right)$.

Spazio tangente a X in P: $\underbrace{\{v \in \mathbb{K}^N \mid \langle \nabla f(P), v\rangle = 0 \ \forall f \in I(X)\}}_{= T_{X,P}} \subseteq \mathbb{K}^N$.

Oss.: se $I(X) = (f_1, \dots, f_k)$ e $f \in I(X)$, $f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i$, $\alpha_i \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^N] \Rightarrow$
$\Rightarrow \nabla f(P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(P) \nabla f_i(P) + \sum_{i=1}^{k} \nabla \alpha_i(P) \underbrace{f_i(P)}_{=0}$.

Allora $T_{X,P} = \{v \mid \langle \nabla f_i(P), v\rangle = 0 \ \forall i = 1, \dots, k\}$.

$\dim T_{X,P} = \dim(\ker J(f_1, \dots, f_k)(P))$, $J(f_1, \dots, f_k) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,N}} = J \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim T_{X,P} = N - \operatorname{rk} J(P)$.

$V_r = \{P \in X \mid \dim T_{X,P} \geq r\} = \{P \in X \mid \operatorname{rk} J(P) \leq N - r\}$ chiuso.

Conclusione: $\begin{array}{l} X \to \mathbb{N} \\ P \mapsto \dim T_{X,P} \end{array}$ è semicontinua superiormente.

$m := \min\{\dim T_{X,P} \mid P \in X\}$, $\{P \in X \mid \dim T_{X,P} = m\} =: X_{sm}$ è aperto $\neq \emptyset$; i suoi punti si dicono lisci (non singolari), quelli di $X \setminus X_{sm}$ si dicono singolari.

Caso delle ipersuperfici: $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ irr., $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$, NSS $\Rightarrow$
$\Rightarrow I(X) = (f) \Rightarrow T_{X,P} = \{v \in \mathbb{K}^n \mid \langle \nabla f(P), v\rangle = 0\}$.

$\dim T_{X,P} = \begin{cases} n & \text{se } \nabla f(P) = 0 \\ n-1 & \text{altrimenti} \end{cases}$. Mostriamo che $\exists P \in X$ t.c. $\nabla f(P) = 0$

e quindi $m = n - 1$.

Dim.: per assurdo $\nabla f(P) = 0 \ \forall P \in X$. $\forall i = 1, \dots, n$, $\left\{\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\right\} \supseteq X \overset{NSS}{\Longrightarrow}$
$\Rightarrow f \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} \ \forall i = 1, \dots, n$. $\deg f > \deg \frac{\partial f}{\partial x_i} \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.
$\operatorname{char} \mathbb{K} = 0 \Rightarrow$ assurdo. $\operatorname{char} \mathbb{K} = p \Rightarrow f = g(x_1^p, \dots, x_n^p) = \sum a_I (x^I)^p$.
Siano $b_I \in \mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ t.c. $b_I^p = a_I \Rightarrow \sum b_I^p (x^I)^p = \left(\sum b_I x^I\right)^p$, assurdo perché f irr.. $\square$

Morale: $P \in V(f)$ è liscio $\Leftrightarrow \dim T_{X,P} = n - 1 = \dim X$.

Derivazione in un punto: $P \in X \subseteq \mathbb{A}^N$ chiuso irr.. Una derivazione di $\mathbb{K}[X]$ in P è $\delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ t.c.

(1) δ è $\mathbb{K}$-lineare; (2) $\forall f, g \in \mathbb{K}[X]$, $\delta(fg) = \delta(f) g(P) + f(P) \delta(g)$.

Oss.: δ derivazione $\Rightarrow \delta(1) = 0 \Rightarrow \delta(\lambda) = 0 \ \forall \lambda$ scalare.

$\operatorname{Der}_P(\mathbb{K}[X])$ sono le derivazioni; è un $\mathbb{K}$-s.v..

Se $X = \mathbb{A}^N$: definisco $\delta_i := \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_P$. Dico che $\delta_1, \dots, \delta_N$ è una base di $\operatorname{Der}_P(\mathbb{K}[\mathbb{A}^N])$.

Oss.: sia $M = I(P)$, allora $\delta(M^2) = 0$.

(a) $\delta_1, \dots, \delta_N$ sono indi. perché $\delta_i(x_j) = \delta_{i,j}$;

(b) sia $\delta \in \operatorname{Der}_P(\mathbb{K}[\mathbb{A}^N])$, $f \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^N]$. Se $P = (a_1, \dots, a_N)$,
$f(x_1, \dots, x_N) = f((x_1 - a_1) + a_1, \dots, (x_N - a_N) + a_N) = g(x_1 - a_1, \dots, x_N - a_N) =$
$= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i (x_i - a_i) + \underbrace{g_1}_{\in M^2} \Rightarrow \delta f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta x_i$. Pongo $\delta x_i = v_i \in \mathbb{K} \Rightarrow$
$\Rightarrow \delta = \sum_{i=1}^{N} v_i \delta_i$.

$\pi : \mathbb{K}[\mathbb{A}^N] \to \mathbb{K}[X]$, ho $\begin{array}{ccc} \operatorname{Der}_P(\mathbb{K}[X]) & \xrightarrow{\Phi} & \operatorname{Der}_P(\mathbb{K}[\mathbb{A}^N]) \\ \delta & \longmapsto & \delta \circ \pi \end{array}$ applicazione lineare, ini. perché π suri..

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[\mathbb{A}^N] \arrow[r, "\tilde{\delta}"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}[X] \arrow[ur, "?"'] & \end{tikzcd}$$

$\tilde{\delta} \in \operatorname{Im} \Phi \Leftrightarrow \tilde{\delta}(I(X)) = 0$.

Se $\tilde{\delta} = \sum_{i=1}^{N} v_i \delta_i$ devo avere $\sum_{i=1}^{N} v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = 0$,
cioè $(v = (v_1, \dots, v_N))$ $\langle \nabla f(P), v\rangle = 0$.

$v = (v_1, \dots, v_N)$, $\delta_v = \sum_{i=1}^{N} v_i \delta_i$, $\delta_v \in \operatorname{Im} \Phi \Leftrightarrow v \in T_{X,P}$.

Ho quindi iso. lineare $T_{X,P} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_P(\mathbb{K}[X])$.

X var. q.p. irr., $P \in X$. $\mathcal{O}_{X,P} = \{f \in \mathbb{K}(X) \mid f \text{ è definita in } P\}$. Ho valutazione $\begin{array}{l} \nu_P : \mathcal{O}_{X,P} \to \mathbb{K} \\ \quad f \mapsto f(P) \end{array}$. $\ker \nu_P = \{f \in \mathcal{O}_{X,P} \mid f(P) = 0\} =: m_P$ è l'unico ideale massimale. $\mathcal{O}_{X,P}$ è una $\mathbb{K}$-algebra locale con ideale massimale m_P.

Se X è affine: $M := I(P) \subseteq \mathbb{K}[X]$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \hookrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ \cap & & \cup \\ \mathbb{K}[X]_M & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{X,P} \end{array}, \quad m_P := M\mathcal{O}_{X,P}.$$

$j : \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$. $\begin{array}{ccc} \operatorname{Der}_P(\mathcal{O}_{X,P}) & \xrightarrow{\Psi} & \operatorname{Der}_P(\mathbb{K}[X]) \\ \delta & \longmapsto & \delta|_{\mathbb{K}[X]} \end{array}$. Dico che è un iso..

Costruisco Ψ^{-1}: sia $\delta : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$, estendo δ a $\tilde{\delta} : \mathcal{O}_{X,P} \to \mathbb{K}$.
$f = \frac{a}{b} \in \mathcal{O}_{X,P}$, $a, b \in \mathbb{K}[X]$, $b(P) \neq 0$. Pongo
$\tilde{\delta} f = \frac{b(P)\delta a - a(P)\delta b}{b(P)^2}$. È ben def.? Se $f = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $ad - bc = 0 \in \mathbb{K}[X]$,

si usa (ex.):
- $a(P)d(P) - b(P)c(P) = 0$;
- $\delta(ad - bc) = 0$.

Quindi, per X affine, ho iso. lineari $T_{X,P} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_P(\mathbb{K}[X]) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Der}_P(\mathcal{O}_{X,P})$, quindi uso l'ultimo come def. di spazio tangente (per X qualsiasi). dipende solo da $P \in X$

Oss.: la nozione di spazio tangente è locale. Infatti, se $P \in V \subseteq X$ (aperto) ho identificazione $\mathbb{K}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}(V)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(X) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{K}(V) \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{O}_{X,P} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_{V,P} \end{array}$$

$\delta : \mathcal{O}_{X,P} \to \mathbb{K}$ derivazione. δ induce $\varphi_\delta : m/m^2 \to \mathbb{K}$ lineare. ($m = m_P$)

Ho $\alpha : \operatorname{Der}_P(\mathcal{O}_{X,P}) \to (m/m^2)^\vee$ (duale), è iso.. Costruisco $\beta : (m/m^2)^\vee \to \operatorname{Der}_P(\mathcal{O}_{X,P})$ inversa di α. Data $\varphi : m/m^2 \to \mathbb{K}$, se $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ pongo $\beta(\varphi)(f) = \varphi(\underbrace{[f - f(P)]}_{\in m/m^2})$. $\beta(\varphi)$ è $\mathbb{K}$-lineare.

$\underbrace{fg - f(P)g(P)}_{\in m} = \underbrace{(f - f(P))(g - g(P))}_{\in m^2} + f(P)(g - g(P)) + g(P)(f - f(P)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \beta(\varphi)$ derivazione.

Conclusione: dato $P \in X$ var. q.p. irr., $T_{X,P} \cong (m_P/m_P^2)^\vee$. «astratto»

Teo.: X var. q.p. irr., $P \in X$ è liscio $\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{K}} T_{X,P} = \dim X$.

Dim.: Oss.: $\varphi : X \to Y$ iso. di varietà, $Q = \varphi(P)$. $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,Q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,P}$ è iso..
$\varphi^*|_{m_Q} : m_Q \xrightarrow{\sim} m_P \Rightarrow$ ho ${}^T d\varphi : m_Q/m_Q^2 \xrightarrow{\sim} m_P/m_P^2$.
$(d\varphi : T_{X,P} \to T_{Y,Q})$

Se $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^N$, ok. In generale, se $\dim X = n$ $\exists Y = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ irr. t.c. $X \sim_{bir} Y$, U, V aperti iso.. $V \cap Y_{sm} \neq \emptyset$, $U \cap X_{sm} \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{ccc} X & \sim_{bir} & Y \\ \cup & & \cup \\ U & \xleftarrow[\varphi]{\sim} & V \end{array}$$

Se $P \in V \cap Y_{sm}$ e $\varphi(P) = Q \in U \cap X_{sm}$,
$\dim T_{X,P} = \dim T_{Y,Q} = \dim Y = \dim X$. $\square$