X, Y var. q.p. irr., $P \in X$, $Q \in Y$.

Ex.: $T_{X\times Y,(P,Q)} = T_{X,P} \times T_{Y,Q}$.

Cor.: $(P,Q) \in X \times Y$ è liscio $\iff$ P, Q lisci.

$X \subseteq \mathbb{P}^n$ chiuso irr., $\dim X = k$.

Teo. (Bertini): X liscia e $H \in (\mathbb{P}^n)^*$ è generale $\Rightarrow X \cap H$ liscia.

Dato $P \in X$, $\overline{T_{X,P}} = \bigcap_{\substack{F \in I(X),\\ F \text{ omogeneo}}} \overline{T_{V(F),P}}$ ($\rightsquigarrow$ tangente proiettivo). In alternativa, $P \in \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$, $\overline{P + T_{X,P}}$ chiusura proiettiva del tangente applicato.

Oss.: $P \in Y \subseteq \mathbb{A}^n$ affine, $H \ni P$, se $H \not\supseteq P + T_{Y,P}$, $H \cap Y$ è liscia in P. Infatti, $I(H\cap Y) \supseteq I(Y) + (\ell)$ dove $\{\ell = 0\} = H$.

Scelgo $f_1, \dots, f_m \in I(Y)$ generatori, $J(P) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)\right)_{j=1,\dots,n}^{i=1,\dots,m}$.

$\dim(\ker J(P)) = \dim Y$. $\ell = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$,

$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} J(P) \\ \hline a_1 \dots a_n \end{pmatrix} = \operatorname{rk}(J(P)) + 1$. $\dim T_{(Y\cap H),P} \leq \dim Y - 1 = \dim(Y \cap H) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim T_{(Y\cap H),P} = \dim(Y\cap H) \Rightarrow P$ liscio per $Y \cap H$.

Dim. (del teo.): $S = \{(P,H) \mid H \supseteq \overline{T_{X,P}}\} \subseteq X \times (\mathbb{P}^n)^*$.

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & (\mathbb{P}^n)^* \end{tikzcd}$$

Sia $x_0 \in X$, $H \in p^{-1}(x_0) \iff H \supseteq \overline{T_{X,x_0}}$ ($\rightsquigarrow \dim = k$) $\Rightarrow p^{-1}(x_0) \cong \mathbb{P}^{n-k-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow S$ è irr. e $\dim S = \dim X + \dim p^{-1}(x_0) = k + n - k - 1 = n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim q(S) \leq n-1$ ($q(S)$ è la varietà duale). Inoltre $q(S)$ è chiuso $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathbb{P}^n)^* - q(S) =: U$ è un aperto $\neq \emptyset$ i cui punti corrispondono a iperpiani H t.c. $X \cap H$ è liscio. $\square$

Rette su una superficie generale di grado d in $\mathbb{P}^3$

$d = 1$, ∞^2 rette;

$d = 2$, Q non degenere: due famiglie ∞^1 di rette, $\operatorname{rk} Q = 3$ cono (∞^1 rette), $\operatorname{rk} Q \leq 2$ ∞^2 rette.

Fisso d, $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{K}[x_0,x_1,x_2,x_3]_d)$.

$I = \{(\ell, [F]) \mid \ell \subseteq V(F)\} \subseteq Gr(2,4) \times \mathbb{P}^N$ è chiuso.

$\ell = \{x_2 = x_3 = 0\}$,
$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ Gr(2,4) & & \mathbb{P}^N \end{tikzcd}$$

$p^{-1}(\ell) \cong \mathbb{P}^{N-d-1}$. $\mathbb{P}GL(3)$ agisce su $Gr(2,4) \times \mathbb{P}^N$ e manda I in sé.

L'azione su $Gr(2,4)$ è transitiva $\Rightarrow$ le fibre di p sono tutte isomorfe $\Rightarrow$

$\Rightarrow I$ irr. e $\dim I = \dim Gr(2,4) + N - d - 1 = 4 + N - d - 1 = N + 3 - d$.

$q(I) = \{[F] \mid V(F)$ contiene una retta$\}$ è un chiuso irr. e $\dim q(I) \leq N + 3 - d$. Se $d \geq 4$, $q(I)$ è un chiuso proprio di $\mathbb{P}^N \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la superficie generale di grado $d \geq 4$ di $\mathbb{P}^3$ non contiene rette.

$d = 3$: $\dim I = \dim \mathbb{P}^N = N = \binom{6}{3} - 1 = 19$.

Oss.: $q : I \to \mathbb{P}^{19}$ è suri. $\iff \exists [F] \in \mathbb{P}^{19}$ t.c. $q^{-1}([F])$ ha $\dim = 0$.

Per vedere che q è suri. basta quindi trovare F come sopra.

Prendo $F = \{x_1 x_2 x_3 - x_0^3 = 0\}$.

$F \cap \{x_0 = 0\} = \{x_1 x_2 x_3 = 0\}$. Verifico che F non contiene altre rette.

Lavoro con $x_0 \neq 0$: $xyz = 1$, sia $\ell = \{(a,b,c) + t(\alpha,\beta,\gamma)\}$ una retta affine.

$f = \{xyz - 1 = 0\}$, $f_{|\ell} = (a + \alpha t)(b + \beta t)(c + \gamma t) - 1 = 0 \ \forall t \Rightarrow$

$\Rightarrow abc = 1$, $\alpha\beta\gamma = 0$, WLOG $\alpha = 0 \Rightarrow a\beta\gamma = 0 \Rightarrow \beta\gamma = 0$, WLOG $\beta = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma = 0$. Conclusione: ogni superficie cubica contiene almeno una retta.

La superficie cubica generale ne contiene un numero finito.

Teo.: $[F]$ superficie cubica liscia $\Rightarrow [F]$ contiene 27 rette. ($\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$)

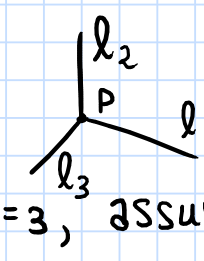
Lemma 1: $\nexists H$ piano t.c. $H \cap F = 2r + s$ con r, s rette di H.

Dim.: WLOG $H = \{x_3 = 0\}$, $F_{|H} = x_0^2 A$, $A \in \mathbb{K}[x_0,x_1,x_2]_1$.

$F = x_0^2 A + x_3 B$, $B \in \mathbb{K}[x_0,x_1,x_2,x_3]_2$. $\underbrace{\{x_0 = 0, x_3 = 0, B = 0\}}_{= Z \subseteq \mathbb{P}^3} \neq \emptyset$, i punti di Z sono singolari per $[F]$. $\square$

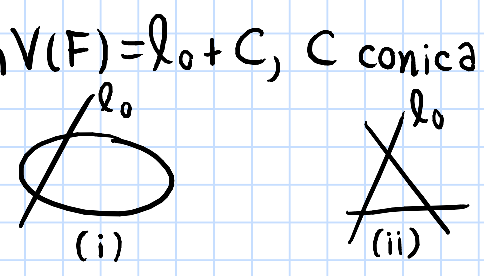
Lemma 2: $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \subseteq V(F)$ rette distinte e sia $P \in \ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell_1, \ell_2, \ell_3$ complanari.

Dim.: per assurdo non lo sono: . Dato che

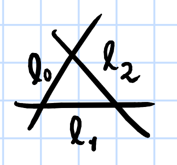
$\ell_i \subseteq T_{X,P} + P$, $i = 1,2,3$, $\dim T_{X,P} = 3$, assurdo. $\square$

Dim. del teo. (cenni): sia $\ell_0 \subseteq V(F)$ retta. Sia $H \supseteq \ell_0$ un piano, $H \cap V(F) = \ell_0 + C$, C conica di H. Due possibilità:



(i) (ii)

Fatto: $\exists H_1, \dots, H_5 \supseteq \ell_0$ t.c. $H_i \cap V(F)$ è nel caso (ii) (esattamente 5).



$H_1 \cap V(F)$. Sia $r \subseteq V(F)$ retta $\neq \ell_0, \ell_1, \ell_2 \Rightarrow r$ interseca esattamente una tra ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2.

\# rette $\neq \ell_0, \ell_1, \ell_2$ che intersecano $\ell_0 = 2 \cdot 4 = 8$,

// // $\ell_1 = 8$,

// // $\ell_2 = 8$.

Totale: $3 + 3 \cdot 8 = 27$. $\square$

Dim. del fatto: sia $x_3 = 0$ il piano $\supseteq \ell_0 + \ell_1 + \ell_2$. $\ell_0 = \{x_2 = 0\}$.

$F = Ax_0^2 + 2Bx_0x_1 + Cx_1^2 + 2Ex_0 + 2\tilde{F}x_1 + G$, $A, \dots, G \in \mathbb{K}[x_2,x_3]$ omogenei di grado opportuno. Fascio di piani per ℓ_0: $\{\lambda x_2 + \mu x_3 = 0 \mid [\lambda,\mu] \in \mathbb{P}^1\}$.

Fisso $[\lambda,\mu]$: $[x_2,x_3] = [\mu,-\lambda]$. $V(F) \cap H_{\lambda,\mu} = \ell_0 + Q_{\lambda,\mu}$.

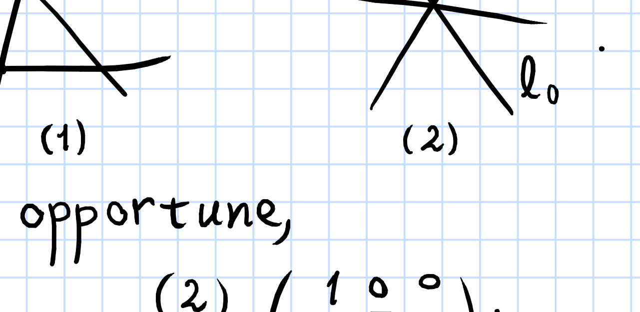
La parte affine di $Q_{\lambda,\mu}$ è $A(-\mu,\lambda)x_0^2 + 2B(-\mu,\lambda)x_0x_1 + C(-\mu,\lambda)x_1^2 + 2E(-\mu,\lambda)x_0 + 2\tilde{F}(-\mu,\lambda)x_1 + G(-\mu,\lambda) \Rightarrow$ matrice completa:

$$N(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} A & B & E \\ B & C & \tilde{F} \\ E & \tilde{F} & G \end{pmatrix},$$ $\det N(\lambda,\mu)$ è omogeneo di grado 5 (se non è $\equiv 0$). $\square$

Fatto 2: le radici in $\mathbb{P}^1$ di $\det N(\lambda,\mu) = 0$ hanno molteplicità 1.

Suppongo $[1,0]$ radice di $\det N(\lambda,\mu) = 0$ (cioè considero l'iperpiano $x_3 = 0$).

Due casi:



(1) (2)

In coordinate opportune,

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C'è da fare i conti.