Categorie e funtori

Spazio topologico X (puntato) $\rightsquigarrow$ gruppo $h(X)$ e a una mappa $X \xrightarrow{f} Y$ continua (puntata) associamo $h(f): h(X) \to h(Y)$.

- spazi omotopicamente equivalenti siano associati a gruppi isomorfi
- mappe omotope sono mandate sullo stesso omomorfismo

Ovvero stiamo considerando un <u>funtore</u> da Top (topologici) in Top_* (topologici puntati) a $\mathcal{G}$ (gruppi con omo.) o Ab (gruppi abeliani).
Tale funtore sarà <u>covariante</u>:

$$X \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow h(f): h(X) \to h(Y)$$

o <u>controvariante</u>:

$$X \xrightarrow{f} Y \rightsquigarrow h(f): h(Y) \to h(X).$$

Es.: fisso X_0 puntato e definisco $h(Y) := [X_0, Y]$ (classi di omotopia di mappe puntate).
Se ho $f: Y \to Z$, induce $[X_0, Y] \xrightarrow{h(f)} [X_0, Z]$.
$h(f)([\varphi]) = [f \circ \varphi]$.
In generale avrò che $h(Y)$ è un insieme, ma se X_0 rispetta opportune ipotesi allora $h(Y)$ è gruppo e $h(f)$ omo..

Es.: $X_0 = (S^n, *)$, $h(Y) = \pi_n(Y)$.
$X_0 = (S^1, *)$, $h(Y) = \pi_1(Y)$.

Fisso Y_0 e definisco $h(X) = [X, Y_0]$ e a $X \xrightarrow{f} Z$ associo $h(f): h(Z) \to h(X)$, $h(f)([\psi]) = [\psi \circ f]$.
Sotto opportune ipotesi $h(X)$ è un gruppo e $h(f)$ è un omo. e ottengo un funtore controvariante.
Es.: se Y_0 è un gruppo, $[X, Y_0]$ è un gruppo.

$\varphi: X \to G$
$\varphi': X \to G$ $\qquad (\varphi * \varphi')(x) = \varphi(x) \overbrace{\cdot}^{\text{prodotto in } G} \varphi'(x)$

e questa operazione passa alle classi di omotopia.

Def.: una <u>categoria</u> $\mathcal{C}$ è il dato di
- una classe di oggetti
- $\forall$ coppia ordinata (X, Y) di oggetti un insieme $hom(X, Y)$ dei "morfismi" con dominio X e codominio Y. Se $f \in hom(X, Y)$ scrivo $X \xrightarrow{f} Y$
- $\forall$ tripla (X, Y, Z) di oggetti ho una "composizione"
$hom(X, Y) \times hom(Y, Z) \longrightarrow hom(X, Z)$ t.c.
$(X \xrightarrow{f} Y, Y \xrightarrow{g} Z) \longmapsto (X \xrightarrow{g \circ f} Z)$
è associativa $(h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f)$ e con identità:
$\forall Y \ \exists \ 1_Y$ t.c. $1_Y \circ f = f$, $g \circ 1_Y = g$.

Non è detto che gli oggetti siano descritti da insiemi e che i morfismi siano funzioni.

Se la classe di oggetti è un insieme e i morfismi sono un insieme dico che la categoria è "piccola".
Es.: Top, Top_*, $\mathcal{G}$, Ab, R (anelli), Insiemi con
- funzioni
- funzioni iniettive
- funzioni suriettive.

Sia X un poset (insieme parzialmente ordinato), dati $x, x' \in X$

$$hom(x, x') = \begin{cases} (x, x') & \text{se } x \leq x' \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Def.: <u>sottocategoria</u> $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ t.c.
a) gli oggetti di $\mathcal{C}'$ sono oggetti di $\mathcal{C}$
b) $hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subset hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ $\forall X, Y$ oggetti di $\mathcal{C}'$
c) stessa legge di composizione.

Se $hom_{\mathcal{C}'}(X, Y) = hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dico che $\mathcal{C}'$ è sottocategoria di $\mathcal{C}$ <u>piena</u>.

Date due categorie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$,
Def.: un <u>funtore covariante</u> (o <u>controvariante</u>) T da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ è una funzione che ad ogni oggetto X di $\mathcal{C}$ associa $T(X)$ oggetto di $\mathcal{D}$ e a ogni $f: X \to Y$ associa $T(f): T(X) \to T(Y)$ (covariante) o $T(f): T(Y) \to T(X)$ (controvariante) e T rispetta identità e composizione.

In topologia algebrica studieremo funtori da categorie di spazi topologici (in particolare Top_*) a categorie di oggetti algebrici ($\mathcal{G}$, Ab, R).
Ci interessa trovare strutture algebriche il più possibile ricche.
Caso peggiore: Set.
Def.: i morfismi che hanno un inverso dx e uno sx sono detti <u>equivalenze</u>. Ex.: in tal caso, inv. dx = inv. sx.

Es.: $H_0(X) = \{f: X \to \mathbb{Z}$ costanti sulle c.c.$\}$.
$\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}$ perché $H_0(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}) \neq H_0(\mathbb{R} \setminus \{p\})$.

$$\begin{tikzcd} \{0,1\} \arrow[r, "id"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & \{0,1\} \\ {[0,1]} \arrow[ur, dashed, "?"'] & \end{tikzcd}$$

Posso estendere $id: \{0,1\} \to \{0,1\}$ a f continua da $[0,1]$ in $\{0,1\}$?
No perché $H_0(\{0,1\}) = \mathbb{Z}^2$ ha rango 2 mentre $H_0([0,1]) = \mathbb{Z}$ ha rango 1 e non ho

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "id"] \arrow[d] & \mathbb{Z}^2 \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

. In Set non ho questo tipo di argomento.

Def.: <u>trasformazione naturale</u> tra categorie. Date $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorie e due funtori F_1 e F_2 da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ (entrambi covar. o controvar.), una trasformazione naturale φ tra F_1 e F_2 è una funzione dagli oggetti di $\mathcal{C}$ ai morfismi di $\mathcal{D}$ t.c. $\forall$ morfismo $f: X \to Y$ di $\mathcal{C}$ vale che

$$\begin{tikzcd} F_1(X) \arrow[r, shift left, "F_1(f)"] & F_1(Y) \arrow[l, shift left, Leftarrow] \arrow[d, "\varphi(Y)"] \\ F_2(X) \arrow[r, shift left, "F_2(f)"] & F_2(Y) \arrow[l, shift left, Leftarrow] \arrow[from=1-1, to=2-1, "\varphi(X)"'] \end{tikzcd}$$

commuta $\to$ se sono covar. e $\Leftarrow$ se sono controvar..

Topologia generale

Come gestiamo unioni infinite? Dati X_i s.t. t.c. su $X_i \cap X_j$ le topologie di X_i e X_j inducono la stessa topologia,

$$X = \bigcup X_i \text{ che topologia ha?}$$

Def.: usiamo la "<u>topologia debole</u>". $C \subset X$ è chiuso sse $C \cap X_i$ lo è $\forall i$.
Es.: $S^\infty = \bigcup_n S^n$, $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$, $\mathbb{RP}^\infty = \bigcup_n \mathbb{RP}^n$, $\mathbb{CP}^\infty = \bigcup_n \mathbb{CP}^n$.

Def.: sia X s.t. Hausdorff, si dice che ha la topologia <u>compattamente generata</u> (diremo che è compattamente generato) se ha la top. debole indotta dai suoi cpti.
Def.: X, Y s.t., la topologia "<u>compatto-aperta</u>" in $\{f: X \to Y, f \text{ continua}\}$ è la topologia che ha come pre-base $\{f \mid f(K) \subset U\}$, U aperto di Y, K cpt di X.
Prop.: sia X s.t. loc. cpt T2, Y, Z s.t.

$Z \xrightarrow{f} Y^X$ $\longrightarrow$ sottinteso con la top. cpt-aperta

è continua sse $\begin{aligned} Z \times X &\longrightarrow Y \\ (z, x) &\longmapsto f_z(x) \end{aligned}$ è continua.

Prop.: X loc. cpt T2, Y, Z s.t., Z T2. Allora

$(Y^X)^Z \longrightarrow Y^{Z \times X}$ è omeo..

Prop.: X T2. X loc. cpt $\Rightarrow$ compattamente generato.