Proprietà dell'omologia ed esempi

Dato X s.t. abbiamo gruppi abeliani $H_0(X), H_1(X), \dots, H_n(X), \dots$.
Per $f: X \to Y$ abbiamo $f_*: H_n(X) \to H_n(Y)$ $\forall n$.
$H_n(X)$ è l'n-esimo gruppo di omologia di X, f_* l'omo. indotto di f.

Proprietà:

a) $f: X \to Y$ omeo. $\Rightarrow f_*: H_n(X) \to H_n(Y)$ è iso. $\forall n$

b) $f_0, f_1: X \to Y$ omotope $\Rightarrow f_{0*} = f_{1*}: H_n(X) \to H_n(Y)$ $\forall n$

c) $H_0(X)$ è gruppo abeliano libero e $\mathrm{rk}\, H_0(X) = \#$cc per archi di X
$H_i(X), i > 0$ sono "più complicati"

d) se X è connesso per archi, $H_1(X) = \pi_1(X)^{Ab}$ → abelianizzato

e) se X è n-varietà cpt, orientata e connessa,
$H_n(X) = \mathbb{Z}$, $H_q(X) = 0$ $\forall q > n$

f) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso $\Rightarrow H_q(X) = 0$ $\forall q > n$

Complessi algebrici

Sia R anello commutativo con unità. Considero la categoria $\mathfrak{M}_R^{\mathbb{Z}}$ degli R-moduli graduati. M (oggetto della cat.) è una famiglia $\{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ di R-moduli.
↳ (s.v. con un anello invece di un campo)

φ un morfismo $M \xrightarrow{\varphi} M'$ di grado p è famiglia di omo. di R-moduli $\{M_n \xrightarrow{\varphi_n} M'_{n+p}\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Def.: un <u>complesso di catene</u> $C = \{C_n, \partial_n\}$ su R è un oggetto di $\mathfrak{M}_R^{\mathbb{Z}}$ con un endomorfismo $\partial: C \to C$ di grado -1 t.c. $\partial^2 = 0$.

$$\dots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \quad \text{t.c. } \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

∂ si dice <u>mappa di bordo</u> o <u>differenziale</u>.

Def.: un <u>omomorfismo di complessi</u> φ è un morfismo $\varphi: C \to D$ su $\mathfrak{M}_R^{\mathbb{Z}}$ di grado 0 e che commuta con ∂.

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "\varphi_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "\partial'_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

(gli indici si potrebbero omettere)

Oss.: $\partial^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\, \partial \subset \mathrm{Ker}\, \partial$.

Def.: dato $C = \{C_n, \partial_n\}$ complesso di catene su R,
$H(C) = \{\underbrace{H_n(C)}_{R\text{-moduli}}\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $H_n(C) = \mathrm{Ker}\, \partial_n / \mathrm{Im}\, \partial_{n+1}$ è l'<u>omologia</u> di C. $H_n(C)$ è l'n-esimo gruppo di omologia di C.

Oss.: $\varphi: C \to D$ morfismo di complessi induce $H(\varphi)$ (o φ_*): $H(C) \to H(D)$ che rispetta il grado.
$H(-)$ è un funtore dalla cat. dei complessi di catene a $\mathfrak{M}_R^{\mathbb{Z}}$.

Notazione: gli elementi di C_n sono <u>n-catene</u>
" " " $\mathrm{Ker}\, \partial_n$ sono <u>n-cicli</u>
" " " $\mathrm{Im}\, \partial_n$ sono <u>n-bordi</u>

$\mathrm{Ker}\, \partial_n = Z_n(C)$ (o Z_n), $\mathrm{Im}\, \partial_{n+1} = B_n(C)$ (o B_n).

Due cicli che rappresentano la stessa classe di omologia si dicono <u>omologhi</u>. La classe di omologia di $H_n(C)$ rappresentata da $c \in Z_n(C)$ si indica con $[c]$.

Oss.: se al complesso C sostituisco C' ottenuto cambiando alcune mappe di bordo $\partial'_n = (-1)^{\varepsilon_n} \partial_n \Rightarrow H_n(C) = H_n(C')$.

Def.: complesso di co-catene $C = \{C^n, \delta^n\}$, è "tutto come prima" tranne che δ è di grado $+1$ e si dice <u>co-bordo</u> o differenziale. Si parla allora di co-catene, co-cicli, co-bordi, classi di co-omologia, co-cicli co-omologhi.

Successioni esatte

Dati tre complessi di catene A, B, C, la successione

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \to 0$$

con φ e ψ morfismi (di grado 0) è esatta se lo sono

$$0 \to A_n \xrightarrow{\varphi_n} B_n \xrightarrow{\psi_n} C_n \to 0 \quad \forall n.$$

(la chiamo successione esatta corta di complessi).

Teo.: data la successione esatta $0 \to A \to B \to C \to 0$ di complessi di catene (o cocatene) $\exists$ un morfismo di grado -1 $(+1)$ $\omega: H(C) \to H(A)$ t.c.

$$\begin{tikzcd} H(A) \arrow[rr, "\varphi_*"] & & H(B) \arrow[dl, "\psi_*"] \\ & H(C) \arrow[ul, "\omega"] & \end{tikzcd}$$

è esatto.

si chiama omomorfismo di <u>connessione</u> ← ω

Più esplicitamente è esatta la successione

$$\dots \to H_n(A) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(B) \xrightarrow{\psi_*} H_n(C) \xrightarrow{\omega} H_{n-1}(A) \to \dots$$

Dim.: (per catene)

$$\begin{tikzcd} & & \arrow[r] & B_{n+1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B_n \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] & 0 \\ & & A_{n-2} \arrow[r, "\varphi"] & B_{n-2} & & \end{tikzcd}$$

$\beta \mapsto \gamma$, γ è ciclo, cioè $\partial\gamma = 0$
$\alpha \mapsto \partial\beta \mapsto 0$
$\partial\alpha \mapsto \partial^2\beta = 0$
φ iniettiva $\Rightarrow$ $\partial\alpha = 0$, cioè α è ciclo

Questa costruzione definisce $\omega([\gamma]) = [\alpha]$. È ben definita?
$\gamma' = \gamma + \Delta\gamma$, trovo $\beta' = \beta + \Delta\beta$. $\exists\, c \in C_{n+1}$ t.c. $\partial c = \Delta\gamma$, trovo $b \in B_{n+1}$ che va in c e scelgo $\Delta\beta = \partial b$ e trovo lo stesso $\partial\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha' = \alpha$. Potrei anche scegliere $\beta'' = \beta + \Delta\beta$ ($\Delta\beta$ generico), ma
$\beta'' \mapsto \gamma'$, $\beta' \mapsto \gamma'$ $\Rightarrow \partial b - \Delta\beta \mapsto 0 \Rightarrow \exists\, a \in A_n$ t.c. $a \mapsto \Delta\beta$ (supponiamo $b = 0$).
$\alpha' = \alpha + \partial a \Rightarrow [\alpha'] = [\alpha]$.

Verifichiamo l'esattezza. Se $\omega([\gamma]) = 0$, potevo scegliere

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[d, mapsto] & \varphi(a) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & 0 \\ \alpha \arrow[r, mapsto] & \partial\beta & \end{tikzcd}$$

$\beta' = \beta - \varphi(a)$
β' è ciclo e $\psi_*[\beta'] = [\gamma]$.
Vale anche il viceversa:
se $[\gamma] = \psi_*[\beta]$ con β ciclo, allora $\omega([\gamma]) = 0$.

Ora: $\psi_*[\beta] = 0 \Leftrightarrow \psi(\beta) = \partial c$ e $\partial\beta = 0 \Leftrightarrow \underset{b \mapsto c}{\psi(\beta - \partial b) = 0}$, $\partial\beta = 0$ $\Leftrightarrow$
$\Rightarrow \beta - \partial b = \varphi(\alpha)$ e $\partial\alpha = 0, \partial\beta = 0$, cioè $[\beta] = \varphi_*[\alpha]$.

Infine: $\varphi_*[\alpha] = 0 \Leftrightarrow \underset{\partial\alpha = 0}{\varphi(\alpha) = \partial\beta} \Leftrightarrow \alpha = \omega[\psi(\beta)]$, $\partial\psi(\beta) = 0$. $\square$

Oss.: se ho un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

allora

$$\begin{tikzcd} & H(A) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d] & H(B) \arrow[d] \arrow[dll, bend left, "\psi_*"] \\ H(C) \arrow[ur, "\omega"] \arrow[d] & H(A') \arrow[r, "\varphi'_*"] & H(B') \arrow[dll, bend left, "\psi'_*"] \\ H(C') \arrow[ur, "\omega^*"] & & \end{tikzcd}$$

commuta.

Omotopia di complessi

Dati $\psi, \varphi: C \to D$ morfismi di complessi di catene, quando inducono la stessa mappa in omologia?

Def.: un'<u>omotopia</u> $\Sigma: \varphi \to \psi$ tra morfismi di catene $\psi, \varphi: C \to D$ è un morfismo di grado $+1$ $\Sigma: C \to D$ t.c.
$\psi - \varphi = \partial\Sigma + \Sigma\partial$, cioè $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\psi_n - \varphi_n = \partial_{n+1}\Sigma_n + \Sigma_{n-1}\partial_n$.

In tal caso diciamo che φ e ψ sono <u>omotopi</u>.

Prop.: se $\psi, \varphi: C \to D$ sono morfismi di complessi omotopi,
$H(\psi) = H(\varphi): H(C) \to H(D)$.

Dim.: $(\varphi - \psi)(s) = \partial\Sigma(s) + \Sigma\partial(s)$. Se $\partial(s) = 0$, ho solo $\partial\Sigma(s)$, cioè le immagini differiscono per un bordo. $\square$

Oss.: il viceversa in generale non vale.

Caso particolare: $\varphi = 0: C \to C$, $\psi = 1: C \to C$
un'omotopia tra φ e ψ è una <u>contrazione</u> e se esiste $H(C) = 0$, cioè C è esatto come complesso.