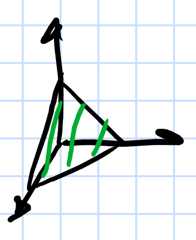
Def. di <u>omologia singolare</u>.

Def.: n-simplesso standard
$\Delta[n]=\Delta^n=\{(t_0,t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i=1,\ t_i\geq 0\}$ 

Pongo $[n]=\{0,1,\dots,n\}$.
Se ho una funzione debolmente crescente $\alpha:[n]\to[m]$, questa induce $\Delta(\alpha):\Delta[n]\longrightarrow\Delta[m]$ e $\Delta(\alpha\circ\beta)=\Delta(\alpha)\circ\Delta(\beta)$, $\Delta(id)=id$.
$$\sum_{i=0}^n t_i e_i \longmapsto \sum_{i=0}^n t_i e_{\alpha(i)}$$
Posto $\delta_i^n:[n-1]\to[n]$ la mappa iniettiva che "salta" i, ho $\delta_j^{n+1}\delta_i^n=\delta_i^{n+1}\delta_{j-1}^n$ per $i<j$ e poniamo $d_i^n:=\Delta(\delta_i^n)$ e per funtorialità
$$\circledast\ \boxed{d_j^{n+1}d_i^n=d_i^{n+1}d_{j-1}^n} \qquad \text{per } i<j$$

Def.: un <u>n-simplesso singolare</u> in X (s.t.) è $\sigma:\Delta^n\to X$ continua.
La <u>i-esima faccia</u> di σ è $\sigma\circ d_i^n$.
Chiamo $C_n(X)$ il gruppo abeliano libero generato dagli n-simplessi singolari di X. $C_\bullet(X)$ è il <u>complesso delle catene singolari</u> di X. $x\in C_n(X)$,
$x=\sum_\sigma n_\sigma\sigma$, $n_\sigma\in\mathbb{Z}$ (nulli tranne al più un numero finito)
La mappa di bordo di $C_\bullet(X)$ è $\partial_q:C_q(X)\to C_{q-1}(X)$ data da $\sigma\longmapsto\sum_{i=0}^q(-1)^i\sigma\circ d_i^q$ (e estendo a tutto $C_q(X)$).

Prop.: $\partial^2=0$.
Dim.: $\partial_{q-1}\circ\partial_q\sigma=\sum_{j=0}^q\sum_{i=0}^{q-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ d_j^q\circ d_i^{q-1}=$
$=\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\sigma\circ d_j\circ d_i+\sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}\sigma\circ d_j\circ d_i=$
$=\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\sigma\circ d_i\circ d_{j-1}+\sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}\sigma\circ d_j\circ d_i=$
$=\sum_{i\geq j}(-1)^{i+j+1}\sigma\circ d_j\circ d_i+\sum_{i\geq j}(-1)^{i+j}\sigma\circ d_j\circ d_i=0$. □

Def.: $(C_\bullet(X),\partial)$ formano un complesso di catene (<u>complesso delle catene singolari</u>). Indichiamo con $H_n(X)$ $\big(= H_n(X,\mathbb{Z})\big)$ l'n-esimo gruppo di omologia di $(C_\bullet(X),\partial)$.
Una mappa continua $f:X\to Y$ induce un omomorfismo di complessi
$$f_\#=C(f):C_q(X)\to C_q(Y) \qquad \sigma\longmapsto f\circ\sigma$$
che induce
$$f_*=H(f):H_q(X)\to H_q(Y).$$
Dunque H_q è un funtore da Top a Ab.

Def.: dato $i:A\hookrightarrow X$ definiamo
$C_n(X,A)=\mathrm{coker}(i_\#:C_n(A)\to C_n(X))$ (cioè $C_n(X)/C_n(A)$).
$C_n(X,A)$ è sempre un gruppo abeliano libero con base data da classi di $\sigma:\Delta^n\to X$ t.c. $\mathrm{Im}\,\sigma\not\subset A$. ∂ di $C_\bullet(X)$ induce ∂ in $C_\bullet(X,A)$ e $C_\bullet(X)\to C_\bullet(X,A)$ è mappa di complessi.
Def.: gruppi di omologia di $C_\bullet(X,A)$ si indicano con $H_n(X,A)=H_n(X,A;\mathbb{Z})$ e si dicono gruppi di omologia relativa della coppia (X,A).
Una mappa continua $f:(X,A)\to(Y,B)$ $\left(\begin{array}{l}\text{cioè } f:X\to Y\\ \text{t.c. } f(A)\subset B\end{array}\right)$ induce mappa di catene $f_\#:C_\bullet(X,A)\to C_\bullet(Y,B)$ e quindi $f_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$.
Dunque H_q è funtore da Top(2) a Ab.
$$0\to C_\bullet(A)\to C_\bullet(X)\to C_\bullet(X,A)\to 0$$
è esatta per def. e induce una successione esatta lunga in omologia.
Teo.: $\forall$ coppia (X,A) la successione
$$\dots\to H_n(A)\to H_n(X)\to H_n(X,A)\xrightarrow{\omega}H_{n-1}(A)\to\dots$$
è esatta.
Più in generale per ogni tripla (X,A,B) $(B\subset A\subset X)$ abbiamo $0\to C_\bullet(A,B)\to C_\bullet(X,B)\to C_\bullet(X,A)\to 0$ e in omologia $\dots\to H_n(A,B)\to H_n(X,B)\to H_n(X,A)\to H_{n-1}(A,B)\to\dots$
Oss.: l'omo. di connessione ω è <u>naturale</u> (cioè se ho un'altra coppia/tripla e corrispondente successione esatta lunga, data $f:(X,A)\to(X',A')$ o $f:(X,A,B)\to(X',A',B')$ le mappe indotte da f commutano con ω).
$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_{n-1}(A) \arrow[d] \\ H_n(X',A') \arrow[r] & H_{n-1}(A') \end{tikzcd}$$

Come calcolare esplicitamente questi gruppi di omologia?
Punto: se $X=\{p\}$, $C_n(X)=\mathbb{Z}$ $\forall n$
∂_{2m} sono iso. per $m>0$, ∂_{2m+1} e ∂_0 mappe nulle $\Rightarrow$
$\Rightarrow H_i(X)=\begin{cases}0 & i>0\\ \mathbb{Z} & i=0\end{cases}$.

<u>Additività</u>
Se X_j, $j\in J$ sono le ccpa di X, allora
$$C_n(X,A)\simeq\bigoplus_{j\in J}C_n(X_j,A\cap X_j).$$
Ex.: $H_0(X)=\mathbb{Z}_{\pi_0(X)}$ (gruppo abeliano libero generato dalle ccpa di X)

<u>Omologia ridotta</u>
A volte torna utile una versione "modificata" dell'omologia in cui il punto ha omologia banale.
Richiediamo $X\neq\emptyset$. Uso il complesso delle catene singolari <u>aumentate</u>.
$$\to C_n(X)\xrightarrow{\partial}C_{n-1}(X)\xrightarrow{\partial}\dots\xrightarrow{\partial}C_1(X)\xrightarrow{\partial}C_0(X)\xrightarrow[\text{aumentazione}]{\varepsilon}\mathbb{Z}\to 0$$
$C_0(X)\xrightarrow{\varepsilon}\mathbb{Z}$, $\sum_i n_i\sigma_i\longmapsto\sum_i n_i$

chiamo $\tilde{H}_n(X)$ l'omologia del complesso aumentato, che chiamo omologia <u>ridotta</u>.
$$\tilde{H}_0(X)\oplus\mathbb{Z}\simeq H_0(X) \qquad \tilde{H}_i(X)\simeq H_i(X)\quad i>0$$

Mappe omotope e omotopia di catene

Def.: $f,g:X\to Y$ sono dette <u>omotope</u> se $\exists F:X\times[0,1]\to Y$ t.c. $f(x)=F(x,0)$ e $g(x)=F(x,1)$.
Sia X s.t. contraibile e definiamo
$$\varepsilon=(\varepsilon_n):C_\bullet(X)\to C_\bullet(X)$$
$\varepsilon_n=0$ $\forall n\neq 0$, $\varepsilon_0(\sum n_\sigma\sigma)=(\sum n_\sigma)\sigma_0$ con $\sigma_0:\Delta^0\to\{x_0\}$ $(\subset X)$, x_0 fissato.
Fissiamo $h:X\times[0,1]\to X$ omotopia tra Id_X e la funzione costante x_0.
Costruiamo un'omotopia di catene $s=(s_n)$ tra ε e $id_{C_\bullet(X)}$.
$s:C_{n-1}(X)\to C_n(X)$ costruita come segue:
considero $q:\Delta^{n-1}\times[0,1]\to\Delta^n$
$$((\mu_0,\dots,\mu_{n-1}),t)\longmapsto(t,(1-t)\mu_0,\dots,(1-t)\mu_{n-1})$$
dato $\sigma:\Delta^{n-1}\to\Delta^n$ abbiamo
$$\begin{tikzcd} \Delta^{n-1}\times[0,1] \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\sigma\times id"'] & \Delta^n \arrow[d, "s(\sigma)"] \\ X\times[0,1] \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd}$$
q è una proiezione che collassa a un pto $\Delta^{n-1}\times\{1\}$
h è costante per $t=1$
Dunque $s(\sigma)$ è ben definita.
$\exists!\ s(\sigma)=s\sigma:\Delta^n\to X$ t.c. $h\circ(\sigma\times id)=s(\sigma)\circ q$.
Per le facce di $s\sigma$ vale (verificarlo) che
$(s\sigma)\circ d_i=s(\sigma\circ d_{i-1})$ per $i>0$ $\quad(s\sigma)\circ d_0=\sigma$. Quindi per $n\geq 1$ abbiamo
$\partial(s\sigma)=(s\sigma)\circ d_0-\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}(s\sigma)\circ d_i=\sigma-\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i s(\sigma\circ d_i)=$
$=\sigma-s(\partial\sigma)$. Per σ 0-simplesso, $\partial(s\sigma)=\sigma-\sigma_0$. Quindi $\partial s+s\partial=id-\varepsilon$. Segue che
Prop.: se X è contraibile allora $H_n(X)=0$ $\forall n>0$.