Teo.: siano $f_0, f_1 : X \to Y$ omotope, inducono lo stesso omo. $H_\bullet(X) \to H_\bullet(Y)$.

Dim.:
$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, hook, "\eta^0(X)"'] \arrow[drr, bend left, "f_0"] & & \\ & X \times [0,1] \arrow[r, "F"] & Y \\ X \arrow[ur, hook, "\eta^1(X)"] \arrow[urr, bend right, "f_1"'] & & \end{tikzcd}$$
F omotopia tra f_0 e f_1. $\eta^i(x) = (x, i)$

Basta vedere che $\eta^0(X)$ e $\eta^1(X)$ inducono la stessa mappa in $H_\bullet$.

Lemma: $\exists$ omotopia di catene naturale tra $\eta^0_\#$, $\eta^1_\#$.

Dim.: voglio creare un morfismo di catene

$s^X_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X \times [0,1])$ t.c.

(1) $\partial s^X_n + s^X_{n-1}\partial = \eta^1_n(X) - \eta^0_n(X)$

(2)
$$\begin{tikzcd} C_n(X) \arrow[r, "s^X_n"] \arrow[d, "f_\#"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C_{n+1}(X \times [0,1]) \arrow[d, "(f \times id_{[0,1]})_\#"] \\ C_n(Y) \arrow[r, "s^Y_n"] & C_{n+1}(Y \times [0,1]) \end{tikzcd}$$
cioè $(f \times id_{[0,1]})_\# \circ s^X_n = s^Y_n \circ f_\#$ (naturalità).

Costruisco s_n induttivamente.

$n=0$: s_0 manda lo 0-simplesso $\sigma : \Delta^0 \to \{x\} \subset X$ nell' 1-simplesso $s_0\sigma : \Delta^1 \to X \times [0,1]$
$(t_0, t_1) \mapsto (x, t_1)$

e quindi $\partial s_0 \sigma = (s_0\sigma)d_0 - (s_0\sigma)d_1 = \eta^1\sigma - \eta^0\sigma$ e si verifica che valgono (1) e (2).

Supponiamo che s_k sia definita e soddisfi (1) e (2) per $k<n$ e consideriamo $\iota_n \in C_n(\Delta^n)$ dato dall'identità $\iota_n : \Delta^n \to \Delta^n$ e voglio costruire $s_n\iota_n : \Delta^{n+1} \to \Delta^n \times [0,1]$ t.c.

$(*)\ \partial(s_n\iota_n) = \eta^1_n(\iota_n) - \eta^0_n(\iota_n) - s_{n-1}(\partial\iota_n) =: \diamond$.

Chi è $\partial(\eta^1_n(\iota_n) - \eta^0_n(\iota_n) - s_{n-1}(\partial\iota_n))$? $\to$ proprietà (1) per s_{n-1}

$= \eta^1_{n-1}(\partial\iota_n) - \eta^0_{n-1}(\partial\iota_n) - \partial s_{n-1}(\partial\iota_n) =$

$= \underbrace{\eta^1_{n-1}(\partial\iota_n) - \eta^0_{n-1}(\partial\iota_n) - (\eta^1_{n-1}(\partial\iota_n) - \eta^0_{n-1}(\partial\iota_n)}_{\text{si cancellano}} \underbrace{- s_{n-2}\partial^2\iota_n}_{=0}) =$

$= 0$.

$\partial\diamond = 0 \Rightarrow \diamond$ è ciclo in $C_n(\underbrace{\Delta^n \times [0,1]}_{\text{contraibile}})$, $n>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ in $C_n(\Delta^n \times [0,1])$ tutti i cicli sono bordi $\Rightarrow \exists\, a \in C_{n+1}(\Delta^n \times [0,1])$ t.c. $\partial a = \diamond$.

Pongo $s_n\iota_n := a$, quindi $(*)$ vale per definizione.

$s_n\sigma$ si definisce per naturalità: $\sigma : \Delta^n \to X$

$$\begin{tikzcd} \overset{\iota_n}{\rotatebox{90}{$\in$}}\ C_n(\Delta^n) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "s_n"'] \arrow[dr] & \overset{\sigma}{\rotatebox{90}{$\in$}}\ C_n(X) \arrow[d, "s_n"] \\ C_{n+1}(\Delta^n \times [0,1]) \arrow[r, "\sigma \times id_{[0,1]}"'] & C_{n+1}(X \times [0,1]) \end{tikzcd}$$

$s_n(\sigma) := (\sigma \times id_{[0,1]})_\# a = (\sigma \times id_{[0,1]})_\# s_n\iota_n$.

La definizione soddisfa (1) e (2):

(1) $\partial s_n(\sigma) = \partial(\sigma \times id)_\# a = (\sigma \times id)_\# \partial a = (\sigma \times id)_\#(\eta^1_n(\iota_n) - \eta^0_n(\iota_n) - s_{n-1}\partial\iota_n) =$
$= \eta^1_n(\sigma) - \eta^0_n(\sigma) - s_{n-1}(\sigma_\#\partial\iota_n) = \eta^1_n\sigma - \eta^0_n\sigma - s_{n-1}\partial\sigma$

$\sigma_\#$ è mappa di catene

(2) $(f \times id)_\# s_n(\sigma) = (f \times id)_\#(\sigma \times id)_\# a = (f\sigma \times id)_\# a =$
$= s_n(f\sigma) = s_n(f_\#\sigma)$. □ □

Successione di Mayer-Vietoris

Cerchiamo di calcolare qualche gruppo di omologia.

Supponiamo $X = A \cup B$ con "opportune ipotesi" e colleghiamo $H_\bullet(X)$, $H_\bullet(A)$, $H_\bullet(B)$, $H_\bullet(A \cap B)$ ("analogo" di Van-Kampen).

Osserviamo che abbiamo omo. indotti dalle inclusioni.

$i_n : H_n(A \cap B) \to H_n(A)$
$j_n : H_n(A \cap B) \to H_n(B)$
$k_n : H_n(A) \to H_n(X)$
$h_n : H_n(B) \to H_n(X)$

$\varphi : H_n(A \cap B) \to H_n(A) \oplus H_n(B)$
$x \mapsto (i_n(x), j_n(x))$

$\Psi : H_n(A) \oplus H_n(B) \to H_n(X)$
$(u, v) \mapsto k_n(u) - k_n(v)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Psi\varphi = 0$.

Teo.: se $A, B \subset X$ sono t.c. $\operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B) = X$ (parte interna), allora $\exists\ \Delta$ omo. naturale t.c. $\Delta : H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ che rende esatta la successione

$\ldots \to H_n(A \cap B) \xrightarrow{\varphi} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{\Psi} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B) \to \ldots$, la successione esatta di M.V..

Se $A \cap B \neq \emptyset$ allora la successione rimane esatta in omologia ridotta.

Vale anche la versione relativa

$(X, Y) = (A \cup B, C \cup D)$, $C \subset A$, $D \subset B$, $X = \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$, $Y = \operatorname{int}(C) \cup \operatorname{int}(D)$

$\ldots \to H_n(A \cap B, C \cap D) \to H_n(A, C) \oplus H_n(B, D) \to H_n(X, Y) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A \cap B, C \cap D) \to \ldots$

Dim.: poi. □

Applicazione: cerchiamo di calcolare per induzione $H_\bullet$ di S^n.

Teo.: $\tilde{H}_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & i = n \\ 0 & i \neq n \end{cases}$.

Dim.: $n = 0$: $H_0(S^0) = \mathbb{Z}^2 \Rightarrow \tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$.

Passo induttivo:

considero i pti $(0, \ldots, 0, 1) = P \in S^{n+1} \ni Q = (0, \ldots, 0, -1)$.

Pongo $A = S^{n+1} \setminus \{P\}$, $B = S^{n+1} \setminus \{Q\}$.

A, B aperti, $A \cup B$ S^{n+1} e abbiamo

$\tilde{H}_{i+1}(A) \oplus \tilde{H}_{i+1}(B) \to \tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \to \tilde{H}_i(A \cap B) \to \tilde{H}_i(A) \oplus \tilde{H}_i(B)$.

Fatto 1: A, B sono omeo. a $\mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$ contraibili $\Rightarrow \tilde{H} = 0$.

Fatto 2: $A \cap B \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ e si retrae per deformazione su S^n.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "id"'] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "r"] & S^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "\text{omotopa a } id"'] & S^n \arrow[r, hook] & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \end{tikzcd} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \tilde{H}(S^n) \simeq \tilde{H}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$.

Mettendo assieme, ho $\tilde{H}_{i+1}(S^{n+1}) \to \tilde{H}_i(S^n)$ iso.. □

$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$.

Prop.: S^n non è contraibile.

Prop.: D^{n+1} non si retrae su S^n.

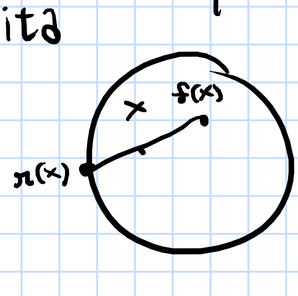
Prop.: $H_i(D^n, S^{n-1}) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ \mathbb{Z} & i = n \end{cases}$ (uso succ. esatta lunga della coppia e il fatto che $\tilde{H}(D^n) = 0$).

$i > 1$ $\quad \underset{= 0}{H_i(D^n)} \to H_i(D^n, S^{n-1}) \to H_{i-1}(S^{n-1}) \to \underset{= 0}{H_{i-1}(D^n)}$

$\underset{0 =}{H_1(D^n)} \to H_1(D^n, S^{n-1}) \to H_0(S^{n-1}) \to H_0(D^n) \to H_0(D^n, S^{n-1}) \to 0$

è iso. se $n > 1$ e cose se $n = 1$

Teo. (pto fisso di Brouwer): una qualsiasi $f : D^n \to D^n$ ha almeno un pto fisso. Dim.: la solita



r è una retrazione. □