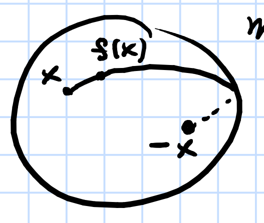
Def.: sia $f: S^n \to S^n$, esiste un $d \in \mathbb{Z}$ unico "a meno del segno" t.c. $\mathbb{Z} = H_n(S^n) \xrightarrow{f_*} H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ è la moltiplicazione per d.
Il segno non dà problemi se uso lo stesso iso. $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$.
d è detto <u>grado</u> di f.

Oss.: 1) f_1 e f_2 omotope $\Rightarrow$ stesso grado (vale il viceversa)
2) il grado di una composizione è il prodotto dei gradi

Def.: <u>sospensione di X</u>: dato X s.t., $\Sigma X = (X \times [0,1]) \Big/ {\scriptstyle (x,0)\sim(y,0) \atop (x,1)\sim(y,1)}$.
A meno di omeo, $\Sigma S^n = S^{n+1}$.
Data $f: X \to Y$ possiamo definire $\Sigma f: \Sigma X \to \Sigma Y$, $[(x,t)] \mapsto [(f(x),t)]$.

Oss.: 3) data $f: S^n \to S^n$, f e Σf hanno lo stesso grado (ex.)
4) l'identità ha grado 1
5) la mappa cost. ha grado 0
6) una mappa $f: S^0 \to S^0$ ha grado $\mathbb{Z} = \tilde{H}_0(S^0) \xrightarrow{d} \tilde{H}_0(S^0) = \mathbb{Z}$, vale ± 1 o 0
7) $r: S^n \to S^n$ riflessione rispetto a un iperpiano di $\mathbb{R}^{n+1}$ ha grado -1 (per induzione usando 3))
8) $h: S^n \to S^n$ antipodale ha grado $(-1)^{n+1}$ (7)+2))
9) $f: S^n \to S^n$ senza pti fissi ha grado $(-1)^{n+1}$ perché omotopa all'antipodale:



mi muovo lungo l'equatore congiungente x e $f(x)$

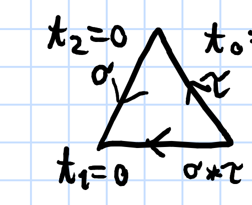
10) Teo.: S^n ammette un campo tangente mai nullo $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ n dispari.
Dim.: ($\Leftarrow$) $r(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_1, -x_0, x_3, -x_2, \dots, x_n, -x_{n-1})$.
($\Rightarrow$) Se avessi un siffatto campo, id sarebbe omotopa all'antipodale $\Rightarrow 1 = (-1)^{n+1} \Rightarrow n$ dispari.
Vediamo l'omotopia: sia r il campo, $f(x) = \frac{x + r(x)}{|x + r(x)|} \neq x \ \forall x \Rightarrow$
$\Rightarrow$ omotopa all'antipodale. $f_\varepsilon(x) = \frac{x + \varepsilon r(x)}{|x + \varepsilon r(x)|}$, $f_0 = id$, $f_1 = f$. $\square$

π_1 e H_1

Un 1-simplesso σ di X è una mappa $\sigma: \Delta^1 \to X$ con
$\Delta^1 = \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 \mid t_0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 = 1\} \simeq [0,1]$.
$(t, 1-t) \mapsto t$

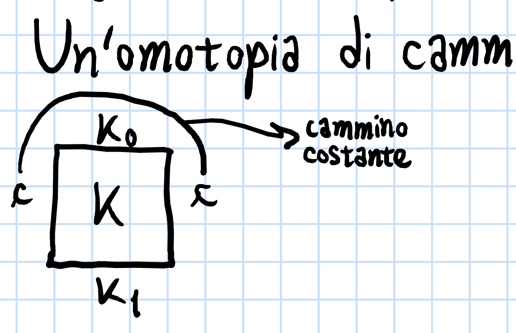
Posso vedere un simplesso come cammino. Il cammino associato a σ è $t \mapsto \sigma(t, 1-t)$. Il cammino inverso è quello associato a $\sigma^-(t_0, t_1) = \sigma(t_1, t_0)$. La composizione di cammini corrisponde a
$$(\sigma * \tau)(t_0, t_1) = \begin{cases} \sigma(2t_0 - 1, 2t_1) & t_1 \leq 1/2 \\ \tau(2t_0, 2t_1 - 1) & t_1 \geq 1/2 \end{cases} \quad (\text{se } \sigma(0,1) = \tau(1,0)).$$

Definiamo $\omega: \Delta^2 \to X$, $(t_0, t_1, t_2) \mapsto (\sigma * \tau)\left(t_0 + \frac{t_1}{2}, \frac{t_1}{2} + t_2\right)$.

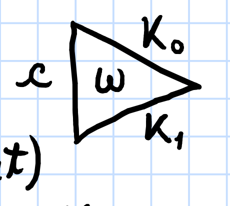


$\partial \omega = \sigma - \sigma * \tau + \tau \Rightarrow$
$\Rightarrow \sigma + \tau$ e $\sigma * \tau$ sono omologhi.

Un loop $\sigma: \Delta^1 \to X$ è un ciclo. Sia $[\sigma]$ la sua classe in H_1.
Sia $\tau: \Delta^1 \to X$ un altro loop. $[\sigma * \tau] = [\sigma] + [\tau]$.
Un'omotopia di cammini a estremi fissi $K: \Delta^1 \times [0,1] \to X$



fattorizza sulla mappa $q: \Delta^1 \times [0,1] \to \Delta^2$, $((t_0, t_1), t) \mapsto (t_0, t_1(1-t), t_1 t)$

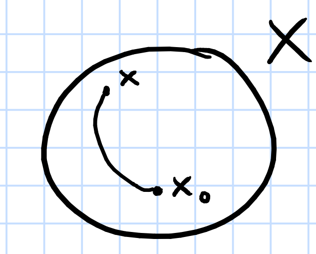


ω mappa indotta su Δ^2

$$\begin{tikzcd} \Delta^1 \times [0,1] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "K"] & \\ \Delta^2 \arrow[r, "\omega"'] & X \end{tikzcd}$$

$\partial \omega = c - K_0 + K_1 \Rightarrow [K_0] = [K_1] \Rightarrow$
$\Rightarrow$ cammini omotopi a estremi fissi determinano cicli omologhi.

Quindi abbiamo un omo. $h': \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$.
$[\gamma] \mapsto$ [ciclo associato all'1-simplesso associato a γ]
h' induce $h: \pi_1(X, x_0)^{ab} \to H_1(X)$.
Teo.: X cpa $\Rightarrow h$ iso..
Dim.: costruiamo un'inversa.

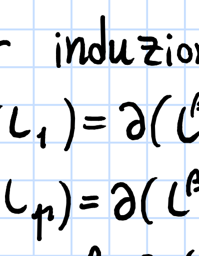


Per $x \in X$ scelgo $\mu(x)$ cammino da x_0 a x (banale se $x = x_0$).
Dato $\sigma: \Delta^1 \to X$ con $\sigma_0 = \sigma(1,0)$, $\sigma_1 = \sigma(0,1)$, associo a σ il loop $\mu(\sigma_0) * \sigma * \mu(\sigma_1)^-$. Per linearità ho omo.
$C_1(X) \xrightarrow{l} \pi_1(X, x_0)^{ab}$.
Se prendo $\tau: \Delta^2 \to X$ con facce $\alpha = \tau d_0$, $\beta = \tau d_1$, $\gamma = \tau d_2$, Δ^2 contraibile $\Rightarrow \gamma * \alpha$ è omotopo a β.
$l(\gamma) + l(\alpha) = l(\gamma * \alpha) = l(\beta)$
$l(\partial \tau) = 0$ e quindi l passa al quoziente $C_1(X)/B_1(X) \xrightarrow{\bar{l}} \pi_1(X, x_0)^{ab}$.
Per costruzione $\bar{l} h = id_{\pi_1(X, x_0)}$. Inoltre h è suriettiva:
preso $\rho = \sum a_\sigma \sigma \in C_1(X)$ (1-ciclo), $\partial \rho = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_\sigma a_\sigma(\sigma_1 - \sigma_0) = 0$, quindi $\sum_\sigma a_\sigma [\sigma] = \sum_\sigma a_\sigma([\mu(\sigma_0)] + [\sigma] + [\mu(\sigma_1)^-]) =$
$= \sum_\sigma a_\sigma [\mu(\sigma_0) * \sigma * \mu(\sigma_1)^-] \in \operatorname{Im} h$. $\square$

Suddivisioni baricentriche

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $v_0, \dots, v_p \in D$. Posso definire il simplesso affine con vertici $v_0, \dots, v_p$ $\sigma: \Delta^p \to D$, $\sum_i \lambda_i e_i \mapsto \sum_i \lambda_i v_i$. Indichiamo σ con $[v_0, \dots, v_p]$.
$\partial [v_0, \dots, v_p] = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p]$ (lo salto). $\forall v \in D$ abbiamo un'omotopia di contrazione $D \times [0,1] \to D$, $(x, t) \mapsto (1-t)x + tv$. Quindi possiamo costruire un'omotopia di catene associata alla contrazione $C_p(D) \to C_{p+1}(D)$
$\sigma = [v_0, \dots, v_p] \mapsto v \cdot \sigma = [v, v_0, \dots, v_p]$.
Per $\sigma \in C_p(D)$ abbiamo $\partial(v \cdot \sigma) = \begin{cases} \sigma - v \cdot (\partial \sigma) & p > 0 \\ \sigma - \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\text{aumentazione}} \cdot v & p = 0 \end{cases}$.
Se prendo σ^β il baricentro di $\sigma = [v_0, \dots, v_p]$, $\sigma^\beta = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v_i$.
Possiamo definire induttivamente $\mathcal{B}_p(X) = \mathcal{B}_p: C_p(X) \to C_p(X)$ che mappa $\sigma: \Delta^p \to X$ in $\mathcal{B}_p(\sigma) = \sigma_\# \mathcal{B}_p(\iota_p)$ dove $\mathcal{B}_p(\iota_p) = \begin{cases} \iota_0 & p = 0 \\ \iota_p^\beta \cdot \mathcal{B}_p(\partial \iota_p) & p > 0 \end{cases}$.

$p=0$
$p=1$
$p=2$



Prop.: $\mathcal{B}_p$ è mappa di catene naturale e omotopa all'identità.
Dim.: naturalità: $f_\# \mathcal{B}(\sigma) = f_\# \sigma_\# \mathcal{B}(\iota_p) = (f\sigma)_\# \mathcal{B}(\iota_p) = \mathcal{B}(f_\# \sigma)$.
Vediamo per induzione che è mappa di catene.
$p=1$: $\partial \mathcal{B}(\iota_1) = \partial(\iota_1^\beta \cdot \mathcal{B}(\partial \iota_1)) = \partial(\iota_1^\beta \cdot \partial \iota_1) = \partial \iota_1 = \mathcal{B}(\partial \iota_1)$.
$p>1$: $\partial \mathcal{B}(\iota_p) = \partial(\iota_p^\beta \cdot \mathcal{B}(\partial \iota_p)) = \mathcal{B}(\partial \iota_p) - \iota_p^\beta \cdot \partial \mathcal{B}(\partial \iota_p) =$
$= \mathcal{B}(\partial \iota_p) - \iota_p^\beta \cdot \mathcal{B}(\partial^2 \iota_p) = \mathcal{B}(\partial \iota_p)$ e per naturalità
$\mathcal{B}(\partial \sigma) = \mathcal{B} \partial(\sigma_\# \iota_p) = \mathcal{B} \sigma_\# \partial \iota_p = \sigma_\# \mathcal{B} \partial \iota_p = \sigma_\# \partial \mathcal{B} \iota_p = \partial \mathcal{B} \sigma$.
Per l'omotopia: potremmo fare "a mano" come per le mappe omotope, ma no.
Useremo un argomento più generale.