$\mathcal{B}$ è omotopa all'identità.

F_* un funtore da $\mathcal{C}$ alla cat CH_* di complessi di catene di gruppi abeliani (C_n, d_n) con $C_n = 0$ per $n < 0$.

Def.: F_* si dice <u>libero</u> se $\forall n\ \exists$ famiglia $((B_{n,j}, b_{n,j}), j \in J(n))$, $B_{n,j}$ oggetti di $\mathcal{C}$ <u>modelli</u> e $b_{n,j} \in F_n(B_{n,j})$ t.c. $\forall X$ oggetto di $\mathcal{C}$ $\{F_n(f)(b_{n,j})\}, f \in Hom_{\mathcal{C}}(B_{n,j}, X), j \in J(n)$ sono base (sistema di generatori senza relazioni di un gruppo abeliano libero) di $F_n(X)$.

Def.: F_* è <u>aciclico</u> rispetto a una famiglia di modelli se $H_m(F_*(B_{n,j})) = 0\ \forall m > 0$.

A cosa sto pensando? $\mathcal{C} = Top$, F_* catene singolari, $B_n = \Delta^n$, $b_n = \iota_n$

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[rr, bend right, "\sigma"'] & \Delta^n \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Teo.: siano F_*, G_* funtori come sopra, F_* libero, G_* aciclico rispetto ai modelli di F_*. $\forall$ trasformazione naturale $\overline{\varphi}: H_0 \cdot F_* \to H_0 \cdot G_*$ $\exists$ trasformazione naturale $\varphi_*: F_* \to G_*$ che induce $\overline{\varphi}$. Due qualsiasi φ, ψ che inducono la stessa $\overline{\varphi}$ sono omotope.

Cor.: $F_* = G_* =$ catene singolari, $\varphi = id$, $\psi = \mathcal{B} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ la prop. dell'altra volta. $\square$

Dim. (del teo.):

Oss.: φ_n e ψ_n sono determinate dalla loro immagine su $F_n(f(b_{n,j}))$. In particolare, φ_0 è determinata se scelgo per ogni $b_{0,j}$ un "$\varphi(b_{0,j})$" che rappresenti $\overline{\varphi}(b_{0,j})$. Sia ora $\varphi_i: F_i \to G_i$ trasf. naturale t.c. $d_i^G \cdot \varphi_i = \varphi_{i-1} \cdot d_i^F$ per $0 < i < n$.

Considero $\varphi_{n-1} d_n^F b_{n,j} \in G_{n-1}(B_{n,j})$. Per $n = 1$ questo determina la classe 0 in H_0 perché φ_0 è definita per mandare a 0 i bordi.

$n > 1$: per induzione ho $d_{n-1}^G \varphi_{n-1} d_n^F b_{n,j} =$
$= \varphi_{n-2} d_{n-1}^F d_n^F b_{n,j} = 0$, G aciclico $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ g_{n,j} \in G_n(B_{n,j})$ t.c. $d_n^G g_{n,j} = \varphi_{n-1} d_n^F b_{n,j}$ e quindi posso definire $\varphi(b_{n,j}) = g_{n,j}$ e quindi $d_n^G \varphi_n = \varphi_{n-1} d_n^F$, così φ è definita, naturale perché abbiamo usato una base (fare un paio di diagrammi commutativi).

Definiamo l'omotopia. Siano φ_*, ψ_* come da enunciato,
$\underbrace{\varphi_0(b_{0,j}) - \psi_0(b_{0,j})}_{\text{omologhi}} = d_1^G c_{0,j}$ per un certo $c_{0,j} \in G_1(B_{0,j})$.
Definiamo $s_0: F_0 \to G_1$.
$b_{0,j} \mapsto c_{0,j}$

Supponiamo di aver definito $s_n: F_n \to G_{n+1}$ t.c.
$d_{i+1}^G s_i + s_{i-1} d_i^F = \psi_i - \varphi_i \quad 0 \leq i < n \quad (s_{-1} = 0)$.

Abbiamo $d_n^G(\psi_n - \varphi_n - s_{n-1} d_n^F) =$
$= \psi_{n-1} d_n^F - \varphi_{n-1} d_n^F - (\psi_{n-1} d_n^F - \varphi_{n-1} d_n^F - s_{n-2} d_{n-1}^F d_n^F) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ c'_{n,j} \in G_{n+1}(B_{n,j})$ t.c. $d_{n+1}^G c'_{n,j} = (\psi_n - \varphi_n - s_{n-1} d_n^F)(b_{n,j})$ e posso definire $s_n: F_n \to G_{n+1}$ tramite $s_n(b_{n,j}) = c'_{n,j}$ e soddisfa $d_{n+1}^G s_n + s_{n-1} d_n^F = \psi_n - \varphi_n$. $\square$

Sia $\mathcal{U}$ famiglia di sottoinsiemi di X le cui parti interne coprono X.

Def.: un simplesso sing. $\sigma: \Delta^n \to X$ è $\mathcal{U}$-piccolo se la sua immagine è contenuta in qualche elemento di $\mathcal{U}$.

Def.: $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ è il sottogruppo di $C_n(X)$ generato dai simplessi $\mathcal{U}$-piccoli. $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ è l'n-esimo gruppo di omologia di $C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Lemma: il diametro di ogni simplesso nella suddivisione baricentrica di $\Delta = [v_0, \dots, v_p]$ è al più $\frac{p}{p+1} diam(\Delta)$.

Dim.: induzione. $p = 0$ ok. Sia Δ' un simplesso della suddivisione di Δ. Uno dei suoi vertici è b, il baricentro di Δ. Gli altri vertici $w_1, \dots, w_p$ sono contenuti in una faccia di Δ.

Il più lungo spigolo di Δ', se non contiene b, allora è spigolo di <u>una faccia di Δ'</u> $\subset$ faccia di Δ e concludiamo per induzione.
$\hookrightarrow$ che è un elemento di una suddivisione di una faccia di Δ

Assumiamo che lo spigolo più lungo di Δ' sia $\overline{bw_1}$. Allora w_1 è vertice di Δ (altrimenti non è alla massima distanza da b) e quindi, se chiamiamo Δ^1 la faccia di Δ non contenente w_1 e b_1 il suo baricentro, $b = \frac{1}{p+1} w_1 + \frac{p}{p+1} b_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow diam(\Delta') = \|\overline{b w_1}\| = \frac{p}{p+1} \|\overline{b_1 w_1}\| \leq \frac{p}{p+1} diam(\Delta)$. $\square$

Lemma: dato $\sigma: \Delta^p \to X$ simplesso singolare $\exists k \in \mathbb{N}$ t.c. ogni simplesso di $\mathcal{B}^k \sigma$ è $\mathcal{U}$-piccolo.

Dim.: considero il ricoprimento $\{\sigma^{-1}(int(U)), U \in \mathcal{U}\}$ di Δ^p, ne prendo il numero di Lebesgue $\varepsilon > 0$ e scelgo k t.c.
$\left(\frac{p}{p+1}\right)^k diam[e_0, \dots, e_p] < \varepsilon$. $\square$

Teo.: l'inclusione di complessi $C_\bullet^{\mathcal{U}}(X) \hookrightarrow C_\bullet(X)$ induce un iso. in omologia.

Dim.: mostriamo che la mappa indotta è iniettiva e suriettiva.

Iniettività: preso $a \in C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$ ciclo, se $[a] \mapsto 0$, allora $\exists b \in C_\bullet(X)$ t.c. $\partial b = a$. $\exists k$ t.c. $\mathcal{B}^k(b) \in C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$.

Chiamo T_k l'omotopia tra $\mathcal{B}^k$ e l'identità.
$\mathcal{B}^k(b) - b = T_k(\partial b) + \partial T_k(b) = T_k(a) + \partial T_k(b)$ e quindi
$\partial \mathcal{B}^k(b) - \underset{\overset{\|}{a}}{\partial b} = \partial T_k(a) \Rightarrow a = \partial(\underset{\uparrow\ \mathcal{U}\text{-piccolo}}{\mathcal{B}^k(b)} - \underset{\uparrow}{T_k(a)}) \Rightarrow$
$\mathcal{U}$-piccolo perché $a \in C^{\mathcal{U}}(X)$ e T_k è naturale perché data dal teo.
$\Rightarrow a = 0$ in $H^{\mathcal{U}}(X)$.

Suriettività: $a \in C_\bullet(X)$ ciclo $\Rightarrow \exists k$ t.c. $\mathcal{B}^k a \in C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)$,
$\mathcal{B}^k a - a = T_k(\underset{\overset{\|}{0}}{\partial a}) + \partial T_k(a) = \partial T_k(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{\overset{\cap}{C_\bullet^{\mathcal{U}}(X)}}{[\mathcal{B}^k a]} \mapsto \underset{\overset{\cap}{C_\bullet(X)}}{[a]}$ perché differiscono per un bordo. $\square$