Lemma: dato un diagramma di gruppi abeliani

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "i_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\ B_1 \arrow[r, "j_1"] & B_2 \arrow[r, "j_2"] & B_3 \arrow[r, "j_3"] & B_4 \arrow[r, "j_4"] & B_5 \end{tikzcd}$$

con righe esatte, f_1 suri., f_5 ini., f_2, f_4 iso. $\Rightarrow f_3$ iso..

Dim.: ex.. $\square$

Teo.: l'inclusione $C^{\mathcal{U}}_\bullet(X, A) \subset C_\bullet(X, A)$ induce un iso. in omologia.

Dim.:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^{\mathcal{U}\cap A}_\bullet(A) \arrow[r] \arrow[d, "①"] & C^{\mathcal{U}}_\bullet(X) \arrow[r] \arrow[d, "②"] & C^{\mathcal{U}}_\bullet(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C_\bullet(A) \arrow[r] & C_\bullet(X) \arrow[r] & C_\bullet(X,A) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

① e ② inducono iso. in omologia.

Usando la successione esatta lunga (*) per ciascuna riga e il lemma, troviamo che ③ induce un iso..

$$(*) \begin{tikzcd} \arrow[r] & H^{\mathcal{U}}_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^{\mathcal{U}}_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & H^{\mathcal{U}}_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H^{\mathcal{U}}_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & H^{\mathcal{U}}_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\ \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] & H_n(X) \arrow[r] & H_n(X,A) \arrow[r] & H_{n-1}(A) \arrow[r] & H_{n-1}(X) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$\square$

Dim. di Mayer-Vietoris:

$X = int(A) \cup int(B)$, $\mathcal{U} = \{A, B\}$.

Oss.: $C^{\mathcal{U}}_\bullet(X) = C^{\mathcal{U}}_\bullet(A) + C^{\mathcal{U}}_\bullet(B)$ da cui ho la successione esatta

$$0 \to C_\bullet(A \cap B) \to C_\bullet(A) \oplus C_\bullet(B) \to C^{\mathcal{U}}_\bullet(X) \to 0$$

che induce

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & H_n(A \cap B) \arrow[r] & H_n(A) \oplus H_n(B) \arrow[r] & H^{\mathcal{U}}_n(X) \arrow[r] & H_{n-1}(A \cap B) \arrow[r] & {} \\ & & & H_n(X) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "\Delta"'] & & \end{tikzcd}$$

Ex.: Δ è naturale.

Ex.: vale l'analoga dim. per la successione relativa. $\square$

Omologia relativa e escissione

Teo.: siano $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ mappe di coppie omotope come mappe di coppie, allora inducono lo stesso omo. in omologia relativa.

Dim.:

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "(f|A)_*"'] \arrow[d, shift left, "(g|A)_*"] & H_n(X) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] & H_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f_*"'] \arrow[d, shift left, "g_*"] & {} \\ \arrow[r] & H_n(B) \arrow[r] & H_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y,B) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

(in alternativa, posso dire che l'omotopia di catene tra $f_\# : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ e $g_\# : C_\bullet(X) \to C_\bullet(Y)$ è naturale e quindi induce un'omotopia tra $(f|A)_\# : C_\bullet(A) \to C_\bullet(B)$ e $(g|A)_\# : C_\bullet(A) \to C_\bullet(B)$, quindi induce al quoziente un'omotopia tra $C_\bullet(X, A) \underset{g_\#}{\overset{f_\#}{\rightrightarrows}} C_\bullet(Y, B)$). $\square$

Cosa misura $H_\bullet(X, A)$? È legato a $X \setminus A$ e a X/A, con varie ipotesi.

Teo. (di escissione): sia (X, A), $W \subset A$ t.c. $\overline{W} \subset int(A)$, allora $(X \setminus W, A \setminus W) \hookrightarrow (X, A)$ induce un iso. in omologia.

Dim.: $\mathcal{U} = \{A, X \setminus W\}$. $int(A) \cup int(X \setminus W) = X$.

$C^{\mathcal{U}}_\bullet(X) = C_\bullet(A) + C_\bullet(X \setminus W)$

$$\begin{tikzcd} C_n(X \setminus W, A \setminus W) \arrow[r] \arrow[dr] & C_n(X, A) \\ & C^{\mathcal{U}}_n(X, A) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

In omologia,

$$\begin{tikzcd} H_n(X \setminus W, A \setminus W) \arrow[r] \arrow[dr, "\circledast"'] & H_n(X, A) \\ & H^{\mathcal{U}}_n(X, A) \arrow[u, "\wr"'] \end{tikzcd}$$

$\circledast$ è un iso. perché $C^{\mathcal{U}}_n(X, A) = C^{\mathcal{U}}_n(X) / C^{\mathcal{U}\cap A}_n(A) =$

$= C_n(X \setminus W) + C_n(A) / C_n(A) = C_n(X \setminus W) / C_n(X \setminus W) \cap C_n(A) =$

$= C_n(X \setminus W) / C_n(A \setminus W) = C_n(X \setminus W, A \setminus W)$. $\square$

Def.: una coppia (X, A) dove A è chiuso in X ed è retratto di deformazione di un suo intorno in X si dice buona coppia.

Teo.: data (X, A) buona coppia, il quoziente $q : (X, A) \to (X/A, A/A)$ induce un iso. in omologia.

Dim.: sia V intorno di A in X che si retrae per deformazione su A.

Abbiamo

$$\begin{tikzcd} H_\bullet(X, A) \arrow[r, "①"] \arrow[d, "q_*"] & H_\bullet(X, V) \arrow[d, "q_*"] & H_\bullet(X \setminus A, V \setminus A) \arrow[l, "③"'] \arrow[d, "q_*", "⑤"'] \\ H_\bullet(X/A, A/A) \arrow[r, "②"] & H_\bullet(X/A, V/A) & H_\bullet(X \setminus A, V \setminus A) \arrow[l, "④"'] \end{tikzcd}$$

① è iso. per la succ. esatta della tripla (X, V, A)

$$\to \underset{\underset{0}{\parallel}}{H_n(V, A)} \to H_n(X, A) \to H_n(X, V) \to \underset{\underset{0}{\parallel}}{H_{n-1}(V, A)} \to$$

perché V retratto per def. di A

② è iso. per $(X/A, V/A, A/A)$ (stesso argomento)

③ e ④ sono. iso. per escissione

⑤ è l'identità. $\square$

Oss.: $H_\bullet(X, \{p\}) \simeq \tilde{H}_\bullet(X)$

naturale solo se X è cpa

... e se la coppia non è buona?

Def. (cono): $CX = X \times [0,1] / X \times \{0\}$

Se $A \subset X$ posso considerare $X \cup CA$.

Cor.: $\tilde{H}_n(X \cup CA) \simeq H_n(X, A)$.

Dim.: $\tilde{H}_n(X \cup CA) \simeq H_n(X \cup CA, \overbrace{A \times \{0\} / A \times \{0\}}^{\{p\}}) =$

$= H_n(X \cup CA, CA) \underset{\text{escissione}}{=} H_n(X \cup CA \setminus \{p\}, CA \setminus \{p\}) = H_n(X, A)$. $\square$

retraggo $CA \setminus \{p\}$ su A

iso. ① del teo. precedente

Teorema di separazione di Jordan-Brouwer

c curva semplice chiusa in $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2 \setminus c$ è unione di due cc aventi c come bordo.

è un sottospazio omeomorfo a S^1

Prop.: sia (X, A) coppia di st.

a) Data $\mu \in H_n(X, A)$, $\exists (C, D) \overset{i}{\subset} (X, A)$ cpt (C, D cpt) e $\mu' \in H_n(C, D)$ t.c. $i_*(\mu') = \mu$.

b) Se abbiamo $(C, D) \overset{i}{\subset} (X, A)$, (C, D) cpt, $v \in H_n(C, D)$ t.c. $i_*(v) = 0$, $\exists (C', D')$ cpt, $(C, D) \overset{j}{\subset} (C', D') \subset (X, A)$ t.c. $j_*(v) = 0$.

Dim.: ogni catena ha un supporto cpt, per cui per a) mi basta scegliere come C il supporto di un rappresentante ω di μ e come D il supporto di $\partial\omega$.

Sia τ un rappresentante di v, sia $\omega \in C_{n+1}(X, A)$ t.c. $\partial\omega = \tau$. in $C_n(X)/C_n(A)$

Basta prendere come C' il supporto di ω $\cup C$ e come D' il supporto di $\partial\omega - \tau$ in $C_n(X)$ $\cup D$. $\square$

Lemma: sia $Y \subset S^n$ omeomorfo a D^k, $0 \leqslant k \leqslant n$. Allora $\tilde{H}_i(S^n \setminus Y) = 0$ $\forall i$.

Dim.: induzione su k. $k = 0 \Rightarrow S^n \setminus \{p\} \simeq \mathbb{R}^n$.

Dovrei considerare $f(D^k)$ con f omeo.. Posso identificare ($I = [0,1]$) $D^k \simeq I^k$ che, sottintendendo f, identificherò con Y.

$I^{k-1} = \{x \in I^k, x_1 = 0\}$, $I^k_+ = \{x \in I^k \mid x_1 \geqslant 1/2\}$

$I^k_- = \{ \quad " \mid " \leqslant " \}$,

$I^k_+ \cap I^k_- \simeq I^{k-1}$, $I^k_+ \cup I^k_- = I^k$.

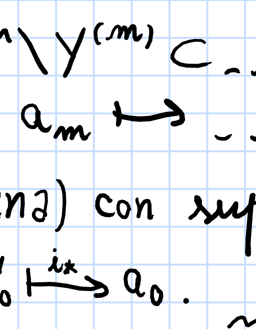
Notiamo

$S^n \setminus (\underbrace{I^k_+ \cap I^k_-}_{I^{k-1}}) = S^n \setminus I^k_+ \cup S^n \setminus I^k_-$ e applichiamo MV.

Per induzione, $\tilde{H}_i(S^n \setminus (I^k_+ \cap I^k_-)) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ho un iso. $\varphi : \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \to \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k_+) \oplus \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k_-)$ $\forall i$.

Cerco un assurdo se $\tilde{H}_i(S^n \setminus I^k) \neq 0$. Sia $a_0 \in \tilde{H}_i(S^n \setminus I^k)$ t.c. $i_{0+}(a_0) \neq 0$ o $i_{0-}(a_0) \neq 0$ (i_{0+} e i_{0-} sono le inclusioni che ti aspetti).

WLOG $i_{0+}(a_0) = \underset{\tilde{H}_i(S^n \setminus I^k_+)}{\underset{\cap}{a_1}} \neq 0$. Iterando (),

trovo una successione $0 \neq a_m \in \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(m)})$ dove $Y^{(m)}$ è un opportuno cubo ottenuto dimezzando $Y^{(0)} = Y$.

$Y^\infty = \bigcap Y^{(m)} \simeq I^{k-1}$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} S^n \setminus Y & \subset & S^n \setminus Y' & \subset & S^n \setminus Y'' & \subset \dots \subset & S^n \setminus Y^{(m)} & \subset \dots \subset & \overset{S^n \setminus I^{k-1}}{\overset{\parallel}{S^n \setminus Y^\infty}} \\ a_0 & \mapsto & a_1 & \mapsto & a_2 & \mapsto \dots \mapsto & a_m & \mapsto \dots \mapsto & 0 \end{array}$$

Ma a_0 ha un rappresentante (catena) con supp in un cpt $C \overset{i}{\subset} S^n \setminus Y$. Allora $\exists a'_0 \in \tilde{H}_i(C)$, $a'_0 \overset{i_*}{\longmapsto} a_0$.

$\exists \underset{\text{cpt}}{C'}$ t.c. $C \subset C' \subset S^n \setminus Y^\infty$, $\quad \begin{array}{ccc} \tilde{H}_i(C) & \to & \tilde{H}_i(C') \\ a_0 & \mapsto & 0 \end{array}$.

$C' \subset S^n \setminus Y^\infty = \bigcup_m (S^n \setminus Y^{(i)}) \overset{C' \text{ cpt}}{\Longrightarrow} C' \subset S^n \setminus Y^{(j)}$ per un certo j.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] & C' \arrow[d, phantom, sloped, "\subset"] \\ S^n \setminus Y \arrow[r, phantom, "\subset"] & S^n \setminus Y^{(j)} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a'_0 \in \tilde{H}_i(C) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{H}_i(C') \ni 0 \arrow[d] \\ \underset{\underset{0}{\nparallel}}{a_0} \in \tilde{H}_i(S^n \setminus Y) \arrow[r] & \tilde{H}_i(S^n \setminus Y^{(j)}) \ni a_j \neq 0 \end{tikzcd}$$

, assurdo.

$\square$