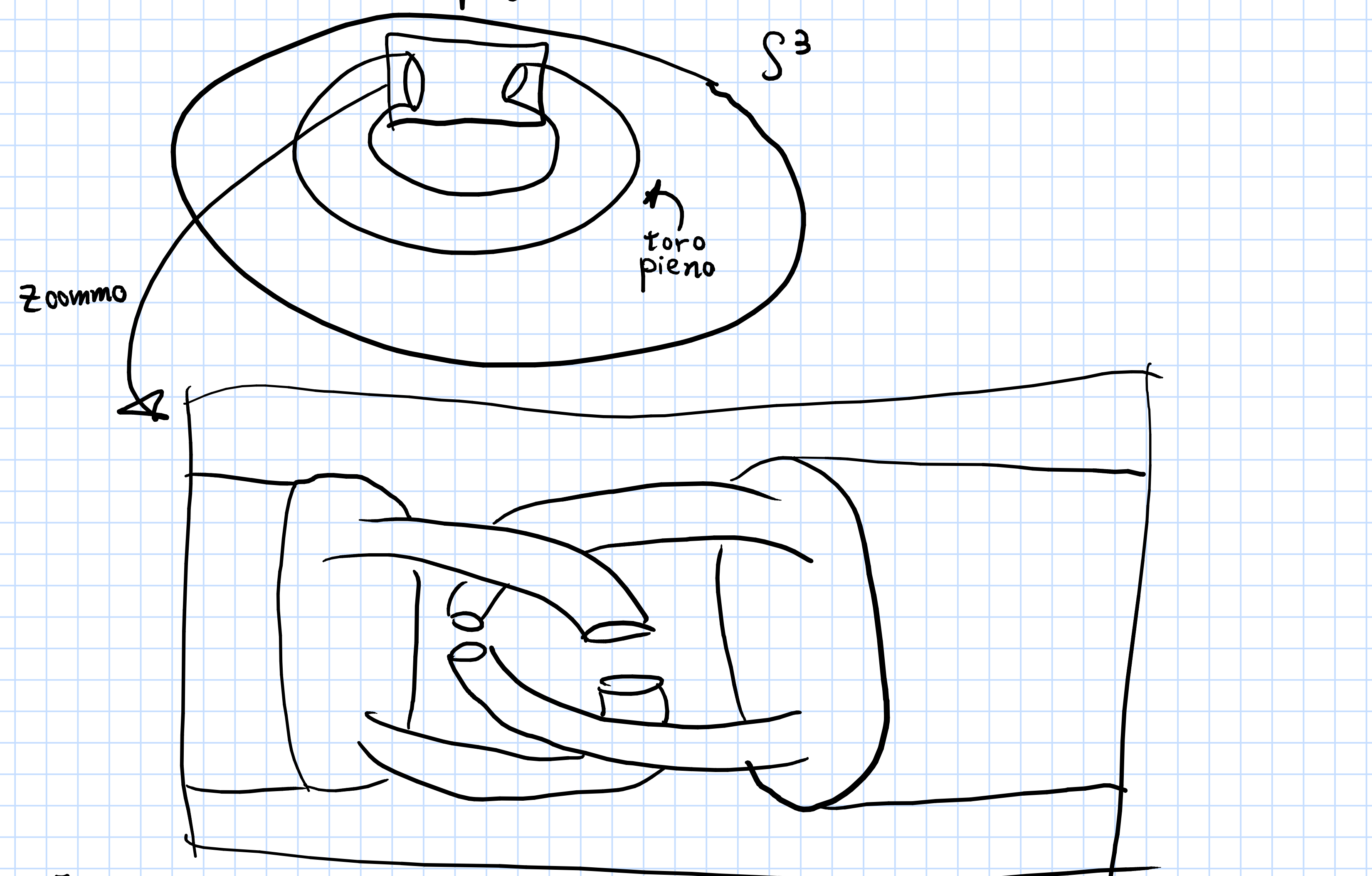
Teo.: sia $A \subset S^n$, A omeo. a S^k, $0 \leq k \leq n-1$.
Allora $\tilde{H}_{n-k-1}(S^n \setminus A) = \mathbb{Z}$ e $\tilde{H}_i(S^n \setminus A) = 0 \ \forall i \neq n-k-1$.
Dim.: induzione su k con MV.
$k=0 \Rightarrow S^n \setminus A = \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \simeq S^{n-1}$.
retratto di def.

Passo induttivo. $A \simeq S^k$, $A = A_1 \cup A_2$, $A_i \simeq I^k$, $A_1 \cap A_2 \simeq S^{k-1}$.
L'unica mappa non banale in MV è
$$0 \longrightarrow \tilde{H}_{i+1}(S^n \setminus \underbrace{(A_1 \cap A_2)}_{S^{k-1}}) \xrightarrow{\simeq} \tilde{H}_i(S^n \setminus \underset{\substack{\cong \\ S^k}}{A}) \longrightarrow 0. \ \square$$

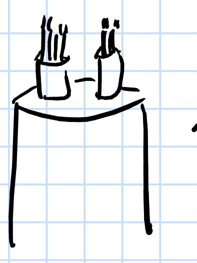
Cor. (Teo. di Jordan-Brouwer): un sottoinsieme $A \subset S^n$, A omeo. a S^{n-1} sconnette S^n in 2 cc.
Dim.: $k = n-1$ nel teo. precedente $\Rightarrow H_0(S^n \setminus A) = \mathbb{Z}^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ 2 ccpa. A chiuso $\Rightarrow S^n \setminus A$ loc. cpa $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ le cc coincidono con le ccpa. $\square$

Prop.: $A \subset S^n$, A omeo. a $S^{n-1} \Rightarrow A$ è il bordo di ognuna delle cc di $S^n \setminus A$.
Dim.: $S^n \setminus A$ loc. connesso $\Rightarrow$ ogni cc è aperta. Quindi il bordo di ogni cc è sottoinsieme di A. Basta mostrare che ogni pto di A è nel bordo di ogni cc.
Siano C_0, C_1 le cc di $S^n \setminus A$. Mostro che $\forall a \in A$ e $\forall a \in N$ intorno $N \cap C_i \neq 0$. $A \simeq S^{n-1}$, posso scrivere $A = A_1 \cup A_2$, $A_i \simeq I^{n-1}$, $A_1 \cap A_2 \simeq S^{n-2}$.
$A_2 \subset N \cap A$
$S^n \setminus A_1$ cpa, $p_0 \in C_0$, $p_1 \in C_1$, scelgo un arco in $S^n \setminus A_1$
$f: I \to S^n \setminus A_1$, $f(0) = p_0$, $f(1) = p_1$.
$f(I) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow f(I) \cap A_2 \neq \emptyset$. $f^{-1}(A_2) \subset I$ è cpt, siano t_0 e t_1 i suoi min e max $\Rightarrow$ sono nel bordo di $f^{-1}(A_2)$.
$f^{-1}(N)$ è aperto di I che li contiene $(A_2 \subset N) \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(N) \cap f^{-1}(C_0)$, $f^{-1}(N) \cap f^{-1}(C_1) \neq \emptyset$. $\square$

Teo. (invarianza del dominio): $U, V \subset S^n$ omeo., se uno è aperto lo è anche l'altro.
Dim.: sia $h: \overset{\text{aperto}}{U} \to V$ omeo.. $x \in U$ ha un intorno $\overset{\cup}{N}$, WLOG $N \simeq D^n$ con $\partial N \simeq S^{n-1}$. Sia $h(x) = y$, $N' = h(N)$ è intorno chiuso di y in V e $\partial N' = h(\partial N)$. Per quanto visto, $S^n \setminus N'$ è connesso e $S^n \setminus \partial N'$ ha 2 cc, $N' \setminus \partial N'$ e $S^n \setminus N'$.
Quindi $N' \setminus \partial N'$ è intorno aperto di y contenuto in V. $\square$
Cor.: $A, B \subset S^n$, $h: A \to B$ omeo., allora h manda pti interni in pti interni e pti del bordo in pti del bordo.
Teo. di Schoenflies: $J \subset S^2$, J omeo. a $S^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ omeo. $S^2 \to S^2$ che mappa J nell'equatore.
Non si generalizza a S^n.
Cerco $S^3 \supseteq K$ cpt, $K \simeq D^3$.



Itero questa costruzione. In omeomorfismo ho



$\simeq D^3$, ma il π_1 del complementare è non banale.

Omologia di grafi

Def.: grafo regolare finito (grafo) è una coppia (X, X^0), X Hausdorff, X^0 sottoinsieme finito (vertici) t.c.
a) $X \setminus X^0$ è unione finita di aperti disgiunti ciascuno omeo. a $(0,1)$
b) detti e_i questi aperti, $\partial e_i = \bar{e}_i \setminus e_i$ è un insieme costituito da due vertici distinti e $(\bar{e}_i, e_i)$ è omeo. a $([0,1],(0,1))$.
Potrei considerare grafi infiniti, o non regolari (con cappi).
Oss.: un grafo è cpt.
Oss.: lo posso sempre immergere in $\mathbb{R}^3$.
Teo. di Kuratowski: dice quando un grafo si immerge in $\mathbb{R}^2$.
Oss.: dato un grafo (X, X^0) posso "suddividerlo" aggiungendo elementi in X^0.
Per studiare $H_\bullet$ di un grafo, studiamo prima $H_\bullet(X, X^0)$.
Abbiamo già visto che $H_q(\bar{e}_i, \partial e_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} & q=1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

Teo.: sia (X, X^0) grafo (finito regolare) di lati $e_1, \dots, e_k$.
L'inclusione $(\bar{e}_i, \partial e_i) \to (X, X^0)$ induce omo. iniettivo
$H_q(\bar{e}_i, \partial e_i) \to H_q(X, X^0)$ e
$H_q(X, X^0) = \oplus H_q(\bar{e}_i, \partial e_i)$, quindi
$H_1(X, X^0)$ è gruppo abeliano libero di rk $= k$
e $H_q(X, X^0) = 0$ per $q \neq 1$.
Dim.: l'ultima affermazione segue dalle precedenti.
Identifico $\bar{e}_i$ con $[0,1]$, chiamo a_i il pto $1/2$, d_i l'intervallo $[1/4, 3/4]$, $D = \bigcup_i d_i$, $A = \{a_1, \dots, a_k\}$.
$$\begin{tikzcd}
H_q(D, D\setminus A) \arrow[r, "①"'] & H_q(X, X\setminus A) & H_q(X, X^0) \arrow[l, "②"'] \\
H_q(d_i, d_i\setminus\{a_i\}) \arrow[u, "⑤"'] \arrow[r, "③"'] & H_q(\bar{e}_i, \bar{e}_i\setminus\{a_i\}) \arrow[u] & H_q(\bar{e}_i, \partial e_i) \arrow[l, "④"'] \arrow[u, "⑥"']
\end{tikzcd}$$
Sono tutte indotte da inclusioni $\Rightarrow$ commuta.
Le mappe orizzontali sono iso..
④: ∂e_i è retratto di def. di $\bar{e}_i \setminus \{a_i\}$
②: idem
① e ③: uso escissione
D disconnesso, $D = \bigsqcup d_i$, $D \setminus A = \bigsqcup (d_i \setminus \{a_i\})$,
$H_\bullet(D, D\setminus A) = \bigoplus H_\bullet(d_i, d_i \setminus \{a_i\})$. $\square$