Studiamo ora la successione della coppia (X, X^0):

$$0 \to H_1(X) \xrightarrow{j_*} H_1(X,X^0) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^0) \to H_0(X) \to 0$$

$H_1(X)$: chi è? $H_1(X,X^0)$: lo abbiamo trovato. $H_0(X)$: abeliano libero, $rk = \#$ cc

Oss.: un sottogruppo di un gruppo abeliano libero è abeliano libero.
Data $0 \to A \to B \to C \to 0$ esatta di gruppi abeliani liberi, si può sollevare ogni generatore di C a una sua controimmagine e troviamo $B \simeq A \oplus C$.

Def.: la caratteristica di Eulero $\chi(X,X^0)$ di un grafo (X,X^0) è $\#$lati$-\#$vertici.

Teo.: sia (X,X^0) un grafo (finito, regolare). Allora $H_q(X)=0\ \forall q>1$ e $H_1(X)$ é gruppo abeliano libero con $rk\, H_1(X) - rk\, H_0(X) = \chi(X,X^0)$.

Dim.: usiamo

$$0 \to \underset{rk=a}{H_1(X)} \to \underset{rk=\#\text{lati}}{H_1(X,X^0)} \to \underset{rk=\#\text{vertici}}{H_0(X^0)} \to \underset{rk=b}{H_0(X)} \to 0$$

Dall'oss. ho che $a-\#\text{lati}+\#\text{vertici}-b=0$. □

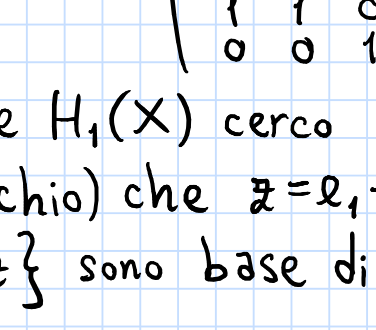
Oss.: $\chi(X,X^0)$ non dipende da X^0.
A volte è utile descrivere $\partial_*: H_1(X,X^0) \to H_0(X^0)$ e per questo serve scegliere delle basi (dei gruppi abeliani liberi) di $H_1(X,X^0)$ e $H_0(X^0)$.
Indichiamo i lati con $e_1,\dots,e_k$ e i vertici con $v_1,\dots,v_m$.
Chiamo v_i l'elemento di $H_0(X^0)$ immagine del generatore di $H_0(\{v_i\})$ t.c. $\varepsilon(v_i)=1$. Quindi ho base di $H_0(X^0)$ data da $\{v_1,\dots,v_m\}$.

Base di $H_1(X,X^0)$? Posso scegliere un generatore di $H_1(\bar{e}_i, \partial e_i)$ per $i=1,\dots,k$. Tale scelta è altrettanto naturale quanto scegliere un generatore di $\tilde{H}_0(\partial e_i)$.

$$\begin{tikzcd} & H_1(\bar{e}_i,\partial e_i) \arrow[dl, "\partial", "\simeq"'] \arrow[d, "\partial"] & & \\ 0 \arrow[r] \tilde{H}_0(\partial e_i) \arrow[r] & H_0(\partial e_i) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Cioè se $\partial e_i = \{v_\alpha, v_\beta\}$, $v_\alpha - v_\beta$ e $v_\beta - v_\alpha$ sono entrambi generatori di $\tilde{H}_0(\partial e_i)$. Per scegliere come orientare i lati, posso ordinare (totalmente) i vertici: se $v_\alpha < v_\beta$ e $\partial e_i = \{v_\alpha, v_\beta\}$, scelgo per generatore di $H_1(\bar{e}_i,\partial e_i)$ la classe "e_i" t.c. $\partial_*(e_i) = v_\beta - v_\alpha$. Questo mi fa scrivere la mappa di bordo.

Es.:



$\partial_* e_1 = v_3 - v_1 \qquad \partial_* e_3 = v_4 - v_1$
$\partial_* e_2 = v_3 - v_2 \qquad \partial_* e_4 = v_4 - v_2$

$$H_1(X,X^0) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X^0)$$

$$[\partial_*] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

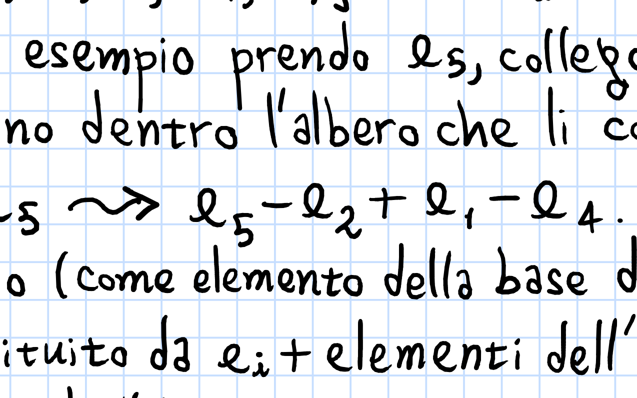
Per descrivere $H_1(X)$ cerco una base di $\ker \partial_*$.
Qui vedo (a occhio) che $z = e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ genera $\ker\partial_*$, $\{e_1, e_2, e_3, z\}$ sono base di $H_1(X,X^0)$.

Posso scegliere $\forall$ cc del grafo un <u>albero massimale</u>.
Posso trovarlo usando l'ordinamento (lessicografico sui vertici) dei lati: parto dal lato più piccolo, $T_0 = \bar{e}_1$

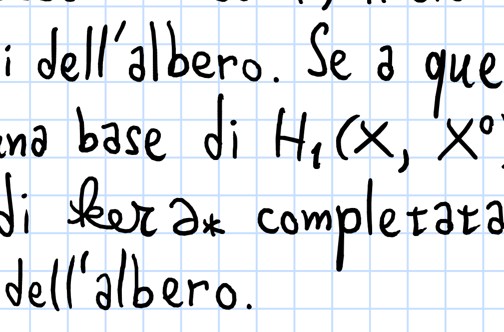
$T_1 = \bar{e}_1 \cup \bar{e}_2$ (se non ho cicli)
$T_1 = \bar{e}_1$ (altrimenti).
$$T_i = \begin{cases} T_{i-1} \cup \bar{e}_{i+1} & \text{(se non ho cicli)} \\ T_{i-1} & \text{(altrimenti)} \end{cases}$$
T_k é un albero massimale.

Adesso ho un albero (o una foresta) massimale e prendo come base di $\ker\partial_*$ quella data dai lati fuori dall'albero/foresta.

Es.:



Albero massimale:



$T_9 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_7\}$.

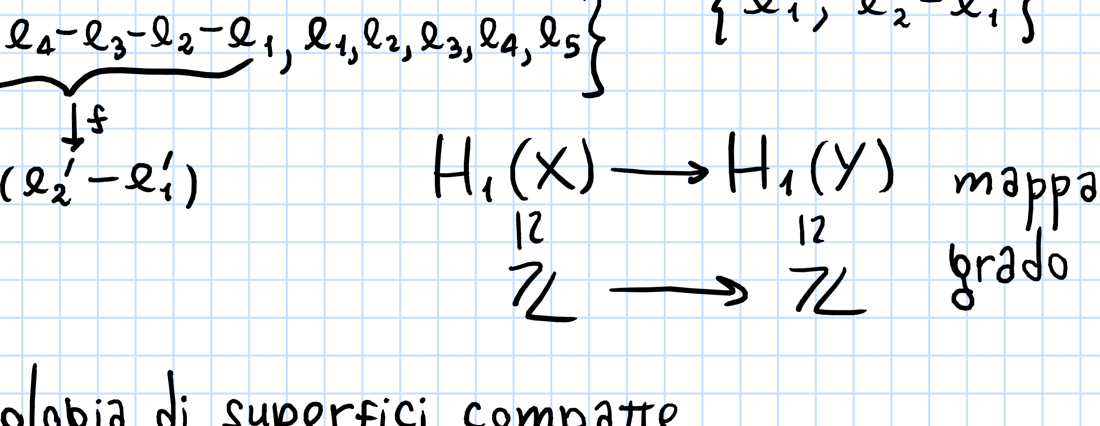
Se per esempio prendo e_5, collego i suoi vertici con l'unico cammino dentro l'albero che li collega; allora associo
$e_5 \rightsquigarrow e_5 - e_2 + e_1 - e_4$. A ogni lato e_i fuori dall'albero associo (come elemento della base di $\ker\partial_*$) il ciclo che lo contiene costituito da e_i + elementi dell'albero. Se a questi cicli aggiungo i lati dell'albero, ottengo una base di $H_1(X,X^0)$ con una parte che è base di $\ker\partial_*$ completata a base di $H_1(X,X^0)$ tramite lati dell'albero.

$H_1(\text{albero}) = 0$.

A cosa mi serve una base di $H_1(X)$? Utile per studiare mappe tra grafi e omo. indotti in omologia.
Siano (X,X^0), (Y,Y^0) due grafi,
$f: X \to Y$ continua. Voglio calcolare $f_*: H_1(X) \to H_1(Y)$.
È utile supporre $f(X^0) \subset Y^0$ (posso farlo aggiungendo vertici a (Y,Y^0)).
Supponiamo che $\forall i$ f mappa $\bar{e}_i$ omeo. su un lato $\bar{e}'_j$ oppure mappa $\bar{e}_i$ in un vertice. Per soddisfare questo devo modificare f con un'omotopia.

Ex.: con queste ipotesi, $f_1: H_1(X,X^0) \to H_1(Y,Y^0)$ è data da
$$f_1(e_i) = \begin{cases} e'_j & \text{se } f \text{ manda } \bar{e}_i \text{ in } \bar{e}'_j \text{ e preserva l'orientamento} \\ -e'_j & \text{" " " " " " inverte "} \\ 0 & \text{" " " " " un vertice} \end{cases}.$$

Es.: $S^1 \subset \mathbb{C}$, $f: S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^3$, chi è $f_*: H_1(S^1) \to H_1(S^1)$.



base di $H_1(X)$?
$$\{\underbrace{e_6 - e_5 - e_4 - e_3 - e_2 - e_1}_{\downarrow f \ \ 3(e'_2 - e'_1)}, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

base di $H_1(Y,Y^0)$?
$\{e'_1, e'_2 - e'_1\}$

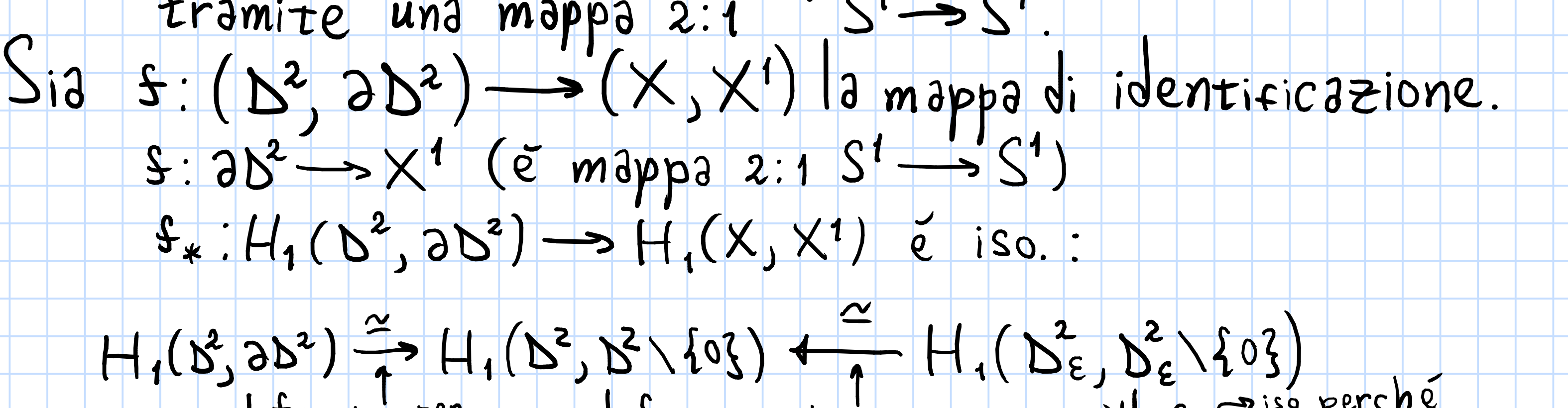
$$\begin{matrix} H_1(X) & \longrightarrow & H_1(Y) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \end{matrix}$$
mappa di grado 3.

<u>Omologia di superfici compatte</u>

$$H_*(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & 0 \\ 0 & 1 \\ \mathbb{Z} & 2 \end{cases}$$

$$H_*(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & 0 \\ \mathbb{Z}^2 & 1 \\ \mathbb{Z} & 2 \end{cases}$$

Es.: piano proiettivo, $X = \mathbb{P}^2\mathbb{R}$.



Voglio identificare nel disco i pti del bordo tramite una mappa 2:1 $S^1 \to S^1$.
Sia $f: (D^2, \partial D^2) \to (X, X^1)$ la mappa di identificazione.
$f: \partial D^2 \to X^1$ (è mappa 2:1 $S^1 \to S^1$)
$f_*: H_1(D^2,\partial D^2) \to H_1(X,X^1)$ è iso.:

$$\begin{tikzcd} H_1(D^2,\partial D^2) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "f_*"] & H_1(D^2, D^2\setminus\{0\}) \arrow[d, "f_*"] & H_1(D^2_\varepsilon, D^2_\varepsilon\setminus\{0\}) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[d, "f_*", "\wr"'] \\ H_1(X,X^1) \arrow[r, "\simeq"'] & H_1(X, X\setminus\{p\}) & H_1(f(D^2_\varepsilon), f(D^2_\varepsilon\setminus\{0\})) \arrow[l, "\simeq"] \end{tikzcd} \Rightarrow$$

iso. per equiv. omotopica; iso. per escissione; iso perché $f_{|D^2_\varepsilon}$ omeo.

$\Rightarrow$ la mappa voluta è iso..

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_2(X) \arrow[r] & H_2(X,X^1) \arrow[r, "\cdot 2"] & H_1(X^1) \arrow[r] & H_1(X) \arrow[r] & H_1(X,X^1) \\ & & 0 \arrow[r] H_2(D^2,\partial D^2) \arrow[u, "f_*", "\wr"'] \arrow[r, "\simeq"] & H_1(\partial D^2) \arrow[u, "f_*(=\cdot 2)"] \arrow[r] & 0 & \end{tikzcd}$$

$H_2(X,X^1) = \mathbb{Z}$, $H_1(X^1) = \mathbb{Z}$, $H_2(D^2,\partial D^2) = \mathbb{Z}$, $H_1(\partial D^2) = \mathbb{Z}$, $H_1(X,X^1) = H_1(D^2,\partial D^2) = 0$

iso. per lo stesso argomento dell'H_1

Allora $H_2(X)=0$, $H_1(X) = \mathbb{Z}/2$, $H_0(X) = \mathbb{Z}$, $H_q(X) = 0$ $q \geq 2$.

In modo simile, detta K la bottiglia di Klein si trova
$H_2(K) = 0$, $H_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2$, $H_0(K) = \mathbb{Z}$, $H_q(K) = 0$ $q \geq 3$.

Fatti:
- ogni superficie chiusa, cpt, orientabile è somma connessa di $\#$ finito di tori (0 tori = sfera);
- ogni superficie chiusa, cpt, non orientabile è somma connessa di $\#$ finito di tori + $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.