Conseguenze: 1) X CW-c. m-dim. $\Rightarrow H_q(X)=0\ \forall q>m$

2) X CW-c. con # finito di m-celle $\Rightarrow$
$\Rightarrow H_m(X)$ fin. gen.

3) X CW-c. con 0 m-celle $\Rightarrow H_m(X)=0$

4) X CW-c. con struttura $K=\{K^n\}$ finite (# finito di celle), sia $\alpha_m=\#m$-celle

Def.: $\chi(K)=\sum_m(-1)^m\alpha_m$ caratteristica di Eulero, è un invariante che non dipende da K.

Dim. (di 4)): dato un gruppo abeliano G, un insieme $A\subset G$ è lin. indi. se lo è "in $\mathbb{Z}$". Rango:= max # di elementi di un insieme lin. indi. =
$=r(G)$.

a) $G\subseteq H\Rightarrow r(G)\leq r(H)$, G quoziente di $H\Rightarrow r(G)\leq r(H)$
(in particolare, G fin. gen. ha rango finito)

b) $0\to N\to G\to H\to 0\Rightarrow r(G)=r(H)+r(N)$ (ex.).

Lemma: K struttura di CW-c. finito di $X\Rightarrow$
$\Rightarrow\sum_m(-1)^m r(C_m(K))=\sum_m(-1)^m r(H_m(X))$.

Dim.: $0\to C_m\to C_{m-1}\to C_{m-2}\to\dots\to C_0\to 0$

Per induzione su m:

$m=1$, $0\to B_0\to C_0\to H_0(C)\to 0$

$0\to H_1(C)\to C_1\to B_0\to 0$, da b) ho
$r(C_0)-r(C_1)=r(H_0)-r(H_1)$.

Passo induttivo: considero C' (C senza C_m),

$0\to C_{m-1}\to C_{m-2}\to\dots\to C_0\to 0$

$$\left.\begin{array}{l}0\to H_m\to C_m\to B_{m-1}\to 0\\ 0\to B_{m-1}\to Z_{m-1}\to H_{m-1}\to 0\end{array}\right\}\text{esatte}$$

per $i\leq m-2$ $H_i(C)=H_i(C')$, $H_{m-1}(C')=Z_{m-1}$.

$$\sum_{i=0}^m(-1)^i r(C_i)=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i r(C_i')+(-1)^m\big(r(H_m(C))+r(B_{m-1})\big)=$$
$$=\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i r(H_i(C))+(-1)^{m-1}\big(r(Z_{m-1})-r(H_m(C))-r(B_{m-1})\big)=$$
$$=\sum_{i=0}^{m-2}(-1)^i r(H_i(C))+(-1)^{m-1}r(H_{m-1}(C))+(-1)^m r(H_m(C)).\ \square$$

Cor.: se $K=\{K^n\}$ è struttura di CW-c. finita su X, allora
$\chi(K)=\sum_i(-1)^i r(H_i(X))$.

$\square$

5) omologia di $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{HP}^n$ ($n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$)

$$H_q(\mathbb{CP}^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{se } q\leq 2n \text{ pari}\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$$H_q(\mathbb{HP}^n)=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{se } q\leq 4n,\ q\equiv 0\ (4)\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

$\mathbb{RP}^n$? Quanto detto non basta (senza pezzi nulli in mezzo alla succ. non è facile).

Oss.: sia $f:X\to Y$ cellulare tra CW-c.. $K=\{K^n\}$ struttura per X, $L=\{L^n\}$ per Y, cioè $f(K^n)\subset L^n\ \forall n$. Abbiamo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H_m(K^m) \arrow[r] \arrow[d, "f_m"] & H_m(K^m,K^{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_m"] & H_{m-1}(K^{m-1}) \arrow[r] \arrow[d, "f_{m-1}"] & H_{m-1}(K^m) \arrow[r] \arrow[d, "f_m"] & 0\\
0 \arrow[r] & H_m(L^m) \arrow[r] & H_m(L^m,L^{m-1}) \arrow[r] & H_{m-1}(L^{m-1}) \arrow[r] & H_{m-1}(L^m) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con f_m indotta da $f_{|K^m}:K^m\to L^m$ e $\phi_m:(K^m,K^{m-1})\to(L^m,L^{m-1})$.

$$\begin{tikzcd}
C_m(K) \arrow[r, "\phi_m"] \arrow[d, "d_m"] & C_m(L) \arrow[d, "d_m"]\\
C_{m-1}(K) \arrow[r, "\phi_{m-1}"] & C_{m-1}(L)
\end{tikzcd}\quad\text{commuta,}$$

quindi $\{\phi_m\}$ induce $\phi_*:H_m(K)\to H_m(L)$.

Teo.: sia θ l'iso. $H_m(X)\xrightarrow{\theta}H_m(K)$ e f_* e ϕ_* come sopra.

$$\begin{tikzcd}
H_m(X) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f_*"] & H_m(K) \arrow[d, "\phi_*"]\\
H_m(Y) \arrow[r, "\theta"] & H_m(L)
\end{tikzcd}\quad\text{commuta.}$$

Dim.: segue dalla commutatività di

$$\begin{tikzcd}
H_m(X) \arrow[d, "f_*"] & H_m(K^m) \arrow[l, "k_m"'] \arrow[r] \arrow[d, "f_m"] & H_m(K^m,K^{m-1}) \arrow[d, "\phi_m"]\\
H_m(Y) & H_m(L^m) \arrow[l] \arrow[r] & H_m(L^m,L^{m-1})
\end{tikzcd}.\ \square$$

Come calcolare i differenziali d_m e le mappe indotte ϕ_m nel complesso cellulare?

Sia X ottenuto da A attaccando m-celle.

Già visto: iso. $\Phi:\oplus H_m(D^m_\lambda,S^{m-1}_\lambda)\to H_m(X,A)$.

Inversa di Φ? Sia $e=e^m_\lambda$ una m-cella fissata. Considero l'omo. indotto dall'inclusione $p^e_*:H_m(X,A)\to H_m(X,X\setminus e)$ e ho iso. (per escissione) $H_m(X,X\setminus e)\to H_m(D^m_\lambda,S^{m-1}_\lambda)$.

La composizione $H_m(X,A)\xrightarrow{p^e_*}H_m(X,X\setminus e)\to H_m(D^m_\lambda,S^{m-1}_\lambda)$ è l'inversa (sulla componente λ) di Φ.

Dato X CW-c. con struttura $K=\{K^n\}$, il bordo della tripla (K^m,K^{m-1},K^{m-2}) $H_m(K^m,K^{m-1})\xrightarrow{d_m}H_{m-1}(K^{m-1},K^{m-2})$ corrisponde, tramite Φ, a una "matrice" di mappe:
$m(\lambda,\mu):H_m(D^m_\lambda,S^{m-1}_\lambda)\to H_{m-1}(D^{m-1}_\mu,S^{m-2}_\mu)$.

Se guardo la composizione

$$\begin{tikzcd}
S^{m-1}_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[rrr, bend right, "L^{\lambda,\mu}"'] & K^{m-1} \arrow[r] & K^{m-1}/(K^{m-1}\setminus e^{m-1}_\mu)\simeq & D^{m-1}_\mu/S^{m-2}_\mu\simeq S^{m-1},
\end{tikzcd}$$

è una mappa da S^{m-1} in sé, di grado $d(\lambda,\mu)$.

Def.: $d(\lambda,\mu)$ si dice <u>numero di incidenza</u> della coppia di celle (λ,μ).
(il caso $m=1$ è "a parte" perché $S^0\to S^0$ ha grado $0,\pm1$)

Prop.: il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd}
H_m(D^m_\lambda,S^{m-1}_\lambda) \arrow[r, "m(\lambda,\mu)"] \arrow[d, "\partial\ \text{iso.}"] & H_{m-1}(D^{m-1}_\mu,S^{m-2}_\mu) \arrow[d, "p_*\ (\text{iso. per escissione})"]\\
\widetilde{H}_{m-1}(S^{m-1}_\lambda) \arrow[r, "L_{\lambda,\mu}"] & \widetilde{H}_{m-1}(D^{m-1}_\mu/S^{m-2}_\mu)
\end{tikzcd}$$

Dim.:

$$\begin{tikzcd}
H_m(K^m,K^{m-1}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Phi^\lambda"] & H_{m-1}(K^{m-1}) \arrow[r, "j_{m-1}"] & H_{m-1}(K^{m-1},K^{m-2}) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d] & \widetilde{H}_{m-1}(K^{m-1}/K^{m-2}) \arrow[d]\\
H_m(D^m_\lambda,S^{m-1}_\lambda) \arrow[r, "\partial"] \arrow[rr, bend right, "m(\lambda,\mu)"'] & \widetilde{H}_{m-1}(S^{m-1}_\lambda) \arrow[u, "f_\lambda"] \arrow[rrd, "L_{\lambda,\mu}"] & H_{m-1}(K^{m-1},K^{m-1}\setminus e^{m-1}_\mu) \arrow[r, "p_*"] & \widetilde{H}_{m-1}(K^{m-1}/K^{m-1}\setminus e^{m-1}_\mu)\\
& & H_{m-1}(D^{m-1}_\mu,S^{m-2}_\mu) \arrow[r] \arrow[u, "j"] & \widetilde{H}_{m-1}(D^{m-1}_\mu/S^{m-2}_\mu) \arrow[u, "\Phi"]
\end{tikzcd}$$

Il diagramma commuta nel modo giusto. $\square$

Oss.: la def. di numero di incidenza usa le mappe caratteristiche e una scelta di equivalenza omotopica tra D^n/S^{n-1} e S^n.
Quindi usiamo dati che non sono parte della struttura di CW-c. e i # di incidenza non sono ben definiti dalla sola struttura di CW-c..
Le scelte possono essere fatte a meno di orientazione, cioè $m(\lambda,\mu)$ sono definiti a meno di segno.

Proiettivo reale

Considero S^n come unione di 2 i-celle, $i=0,\dots,n$, E^i_+, E^i_-.
Il complesso cellulare associato è

$$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\xrightarrow{d_n}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\xrightarrow{d_{n-1}}\dots\xrightarrow{d_1}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\quad(n+1\text{ termini}).$$

Calcoliamo l'omologia $H_i(S^i,S^{i-1})=H_i(D^i_+,S^{i-1})\oplus H_i(D^i_-,S^{i-1})=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.
La mappa antipodale $S^n\xrightarrow{\alpha}S^n$ si restringe all'antipodale $S^{i-1}\to S^{i-1}$ ed è omeo.. Se x^i genera $H_i(D^i_+,S^{i-1})\simeq\mathbb{Z}$,
α_*x^i " $H_i(D^i_-,S^{i-1})$.

Lemma: $d_i(x^i)=\pm(\alpha_*x^{i-1}+(-1)^i x^{i-1})$.

Dim.: d_i è composizione

$$H_i(S^i,S^{i-1})\xrightarrow{\partial}H_{i-1}(S^{i-1})\xrightarrow{j_{i-1}}H_{i-1}(S^{i-1},S^{i-2}).$$

α commuta con ∂ e j e ha grado $(-1)^i$ su $S^{i-1}\Rightarrow$
$\Rightarrow d_i\circ\alpha_*=j_{i-1}\circ\partial\circ\alpha_*=j_{i-1}\alpha_*\circ\partial=(-1)^i j_{i-1}\partial=(-1)^i d_i$,
quindi $\alpha_*x^i+(-1)^{i+1}x^i\in\operatorname{Ker}(d_i)$.

$H_q(S^n)=\begin{cases}0 & n\neq q\\ \mathbb{Z} & n=q\end{cases}$, da cui $\operatorname{Ker}d_i=\operatorname{Im}d_{i+1}$ ha rango 1 per $i=1,2,\dots,n-1$; in particolare $d_ix^i\neq0$ (altrimenti anche $d_i\alpha_*x^i=0$).
Quindi $\alpha_*x^i+(-1)^{i+1}x^i$ genera $\operatorname{Ker}d_i=\operatorname{Im}d_{i+1}$ perché se
$d_i(ax^i+b\alpha_*x^i)=0$ allora $(a+(-1)^ib)\underbrace{d_i(x^i)}_{\neq 0}=0\Rightarrow a=(-1)^{i+1}b$.

$d_{i+1}(\alpha_*x^{i+1})=(-1)^{i+1}d_{i+1}(x^{i+1})$ generano $\operatorname{Im}d_{i+1}=\operatorname{Ker}d_i$
generato anche da $d_{i+1}(x^{i+1})\Rightarrow d_i(x^i)=\pm(\alpha_*x^{i-1}+(-1)^ix^{i-1})$. $\square$