$$\mathbb{RP}^n = S^n/\{\pm 1\}$$

Teo.: il complesso algebrico associato a $\mathbb{RP}^n$ con la cellularizzazione indotta da quella della sfera al quoziente è

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{(-1)^n+1} \mathbb{Z} \xrightarrow{(-1)^{n-1}+1} \mathbb{Z} \to \dots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$$

(a meno del segno). Quindi $H_n(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} 0 & 2 \mid n \\ \mathbb{Z} & 2 \nmid n \end{cases}$. Per $0<i<n$ $H_i(\mathbb{RP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & 2 \nmid i \\ 0 & 2 \mid i \end{cases}$. Per $i>n$ è zero. $i=0$ è ovvio.

Dim.: uso $S^n \xrightarrow[/\{\pm 1\}]{\pi} \mathbb{RP}^n$ (identificazione antipodale)

$$C_i^{cw}(S^n) = \underbrace{H_i(D_+^i, S^{i-1})}_{(a)} \oplus \underbrace{H_i(D_-^i, S^{i-1})}_{(b)}$$

Entrambi (a) e (b) mappano su $C_i^{cw}(\mathbb{RP}^n) = H_i(D^i, S^{i-1})$.
x^i, $\alpha_* x^i$ vanno nello stesso generatore y^i di $H_i(D^i, S^{i-1})$.
$d(y^i) = d(\pi_*(x^i)) = \pi_* d(x^i) = \pi_*(\alpha_* x^{i-1} + (-1)^{i-1} x^{i-1}) =$
$= y^{i-1} + (-1)^i y^{i-1}$. $\square$

Omologia a coefficienti in un modulo e coomologia

Sia $C_\bullet = (C_n, \partial_n)$ un complesso di catene di gruppi abeliani liberi.
Sia G un gruppo abeliano (o un anello).

Omologia singolare a coefficienti in G

$$\to C_n \otimes_{\mathbb{Z}} G \xrightarrow{\partial_n \otimes \mathrm{Id}_G} C_{n-1} \otimes G \to$$

$(\partial \otimes \mathrm{Id}_G)^2 = 0$

Per definizione,
$H_n(C; G) := H_n(C \otimes G)$.
Se $C = C_\bullet(X)$ o $C_\bullet(X, A)$,
$H_n(X; G) = H_n(C_\bullet(X) \otimes G)$ e
$H_n(X, A; G) = H_n(C_\bullet(X, A) \otimes G)$.

Coomologia " " " " "

Uso il complesso

$$\mathrm{Hom}(C_i, G) \xleftarrow{\delta^{i-1}} \underset{\varphi}{\underset{\Psi}{\mathrm{Hom}(C_{i-1}, G)}}$$

$\delta^{i-1}\varphi = (-1)^i \varphi \circ \partial_i$

$H^\bullet(C_\bullet; G) := H^n(\mathrm{Hom}(C, G)) =$
$= \mathrm{Ker}(\delta^n)/\mathrm{Im}(\delta^{n-1})$.

$\mathrm{Ker}\, \delta^n = Z^n$ cocicli
$\mathrm{Im}\, \delta^{n-1} = B^n$ cobordi
$\mathrm{Hom}(C_n, G)$ cocatene
$X \rightsquigarrow C^n(X; G) := \mathrm{Hom}(C_n(X), G)$
$\rightsquigarrow H^n(X; G) := H^n(\mathrm{Hom}(C_\bullet(X), G))$

Sono funtori controvarianti: $f: X \to Y$
$f^\#: C^n(Y; G) \to C^n(X; G)$
$f^*: H^n(Y, G) \to H^n(X; G)$

Oss.: $G \rightsquigarrow H^*(X; G)$ è covariante; i funtori da X s.t. (o (X,A)) in omologia sono tutti covarianti.

$H_n(X; \mathbb{Z}) = H_n(X)$, $H^n(X) := H^n(X; \mathbb{Z})$.

Considero $0 \to A \to B \to C \to 0$ esatta corta di gruppi abeliani.
Lemma: $A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0$ è esatta.
Lemma: $0 \to \mathrm{Hom}(C, G) \to \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$ è esatta.
Dim.: ex. $\square$

Es.: 1) $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$, $G = \mathbb{Z}_2$, $\otimes G$ non dà una succ. esatta (la prima mappa non è iniettiva);
2) $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$, $G = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathbb{Z})$,
$\underset{\overset{\parallel}{0}}{\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})} \to \underset{\overset{\parallel}{\mathbb{Z}}}{\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}$ non può essere suriettiva.

Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ esatta corta di gruppi abeliani con C libero, allora
Lemma: $0 \to A \otimes G \to B \otimes G \to C \otimes G \to 0$ è esatta e
Lemma: analogo con Hom.
Dim.: basta mostrare che $0 \to A \to B \to C \to 0$ spezza.
Sia $\{e_i\}_{i \in I}$ insieme libero di generatori di C, scelgo $b_i \in B$ t.c. $b_i \mapsto e_i$ e definisco $s: \begin{array}{c} C \to B \\ e_i \mapsto b_i \end{array}$.
Allora $0 \to A \to \underset{\underset{A \oplus s(C)}{\wr\wr}}{B} \to C \to 0$, $B \otimes G = (A \otimes G) \oplus (C \otimes G)$ e $\mathrm{Hom}(B, G) = \mathrm{Hom}(A, G) \oplus \mathrm{Hom}(C, G)$. $\square$

Funtori Tor e Ext

Consideriamo R un PID e ci mettiamo nella categoria degli R-moduli (pensa $R = \mathbb{Z}$, categoria dei gruppi abeliani).

Def.: una succ. esatta corta
$0 \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$ è una risoluzione libera di A se F_0 è libero ($\Rightarrow F_1$ libero).

Es. (risoluzione standard): $F(A) :=$ R-modulo libero generato da elementi di A,
$\begin{array}{c} F(A) \to A \\ \sum m_a[a] \mapsto \sum m_a a \end{array}$, $m_a \in R$, $K(A) = \mathrm{Ker}(F(A) \to A)$ e
$0 \to K(A) \to F(A) \to A \to 0$ è risol. libera di A.

Def.: data la risol. standard di A e preso G un R-modulo, definiamo $\mathrm{Tor}(A, G) := \mathrm{Ker}(K(A) \otimes G \to F(A) \otimes G)$.
Data una qualsiasi altra risol. libera, ottengo lo stesso risultato.
Lemma: data $f: A \to A'$ e delle risol. libere di A e A', allora $\exists$ un diagramma commutativo come segue:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_0"] \arrow[dl, "s"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F_1' \arrow[r, "i'"'] & F_0' \arrow[r, "p'"'] & A' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e se (f_1', f_0') è un'altra scelta di omo. che fa commutare, allora $\exists$ $s: F_0 \to F_1'$ t.c. $f_0 - f_0' = i's$, $f_1 - f_1' = si$.

Conseguenze:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tor}(A, G) \arrow[d] & 0 \arrow[r] & K(A) \arrow[r] \arrow[d] & F(A) \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ \widetilde{\mathrm{Tor}}(A, G) \arrow[d] & 0 \arrow[r] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\ \mathrm{Tor}(A, G) & 0 \arrow[r] & K(A) \arrow[r] & F(A) \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

È tutto omotopo all'identità $\Rightarrow$ viene un iso. tra i Tor.

Dim. (del lemma): **Oss.:** è facile definire f_0 che fa commutare

$$\begin{tikzcd} e_i \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & p(e_i) \arrow[d, mapsto] \\ F_0 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[d, "f"] \\ F_0' \arrow[r, "p'"] & A' \\ e_i' \arrow[r, mapsto] & f(p(e_i)) \end{tikzcd}$$

generatore libero

$(fp = p'f_0)$

lo scelgo t.c. $p'(e_i') = f(p(e_i))$

Poiché $p' f_0 i = f p i = f\, 0 = 0$, $\exists!$ f_1 t.c. commuta

$$\begin{tikzcd} e_j \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto, bend right] & i(e_j) \arrow[r, mapsto] \arrow[dd, mapsto, bend left] & 0 \arrow[dd, mapsto] \\ F_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f_1"] & F_0 \arrow[d, "f_0"] & \\ F_1' \arrow[r, "i'"] & F_0' \; f_0(i(e_j)) \arrow[r, mapsto] & 0 \\ e_j' \arrow[ur, mapsto] & & \end{tikzcd}$$

$\exists!$ t.c. $i'(e_j') = f_0(i(e_j))$

Poiché $p'(f_0 - f_0') = fp - fp = 0$, $f_0 - f_0'$ ha immagine in $\mathrm{Ker}\, p'$.
Allora posso definire $s: F_0 \to F_1'$ t.c. $i's = f_0 - f_0'$.
Infine, $i'(f_1 - f_1') = (f_0 - f_0')i = i'si$, i' iniettiva $\Rightarrow f_1 - f_1' = si$. $\square$

Cor.: $\mathrm{Tor}(A, G) = \mathrm{Ker}(F_1 \otimes G \to F_0 \otimes G)$ per qualsiasi $0 \to F_1 \to F_0 \to A \to 0$ risol. libera.

Prop. (ex.): (1) A abel. libero $\Rightarrow \mathrm{Tor}(A, G) = 0$;
(2) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n, G) = \{g \in G \mid ng = 0\}$;
(3) G libero da torsione $\Rightarrow \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/n, G) = 0$;
(4) $\mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/d$ $(d = ?)$;
(5) $\mathrm{Tor}(A_1 \oplus A_2, G) = \mathrm{Tor}(A_1, G) \oplus \mathrm{Tor}(A_2, G)$.