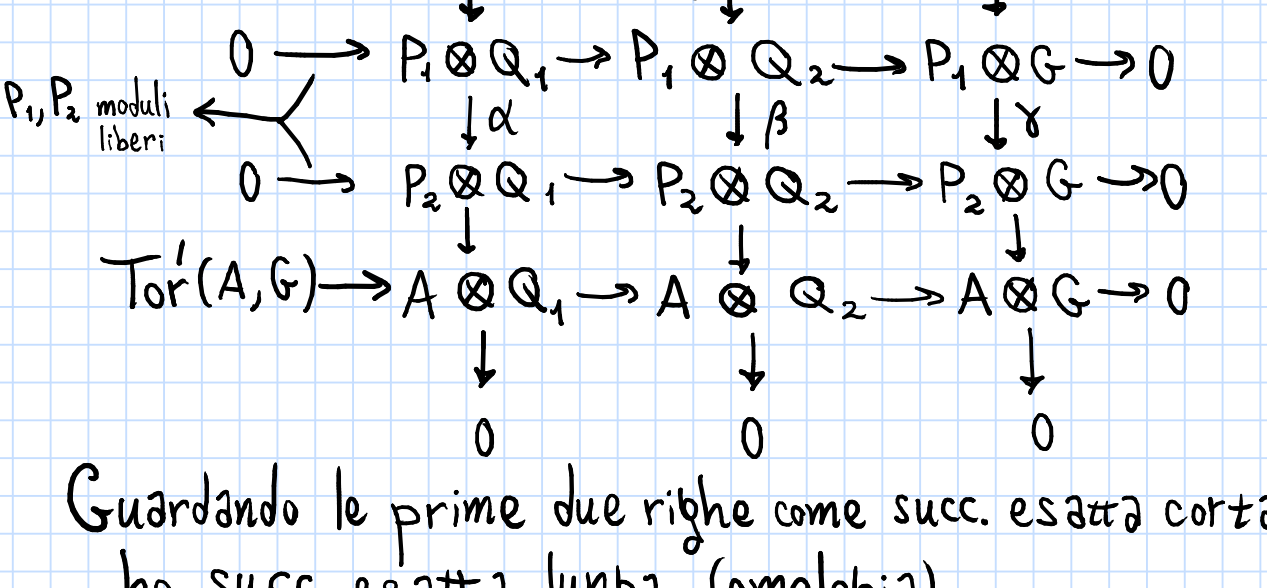


Def.: $0 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow G \rightarrow 0$ risol. libera,
 $Tor'(A, G) = Ker(A \otimes Q_1 \rightarrow A \otimes Q_2)$.

Oss.: non dipende dalla risoluzione scelta.

Prop.: $Tor'(A, G) = Tor(A, G)$.

Dim.: $0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow A \rightarrow 0$ libere



Guardando le prime due righe come succ. esatta corta di complessi, ho succ. esatta lunga (omologia)

$$Ker \alpha \rightarrow Ker \beta \rightarrow Ker \gamma \rightarrow coker \alpha \rightarrow coker \beta \rightarrow coker \gamma \Rightarrow Tor(A, G)$$

$\Rightarrow Tor(A, G) = Ker(coker \alpha \rightarrow coker \beta) = Tor'(A, G)$. \square

Def.: $Tor(A, B) = A * B = B * A$.

Def.: $0 \rightarrow K(A) \xrightarrow{i} F(A) \rightarrow A \rightarrow 0$, applichiamo $Hom(\cdot, G)$:

$$0 \rightarrow Hom(A, G) \rightarrow Hom(F(A), G) \xrightarrow{i^*} Hom(K(A), G),$$

$Ext(A, G) := coker(i^*)$.

Oss.: (come per Tor) la def. di Ext non dipende dalla risol. libera scelta.

Prop. (ex.): $A, B \mathbb{Z}$ -moduli,

- (1) A libero $\Rightarrow Ext(A, B) = 0$
- (2) $Ext(\mathbb{Z}/m, B) = B/mB$
- (3) $Ext(\mathbb{Z}/m, B) = 0$ se $B = \mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}$
- (4) $Ext(\mathbb{Z}/m, \mathbb{Z}/m) = \mathbb{Z}/m$?
- (5) $Ext(A_1 \oplus A_2, B) = Ext(A_1, B) \oplus Ext(A_2, B)$.

Prop. (teorema dei coefficienti universali per l'omologia):

sia (C, d) un complesso di catene di moduli liberi.

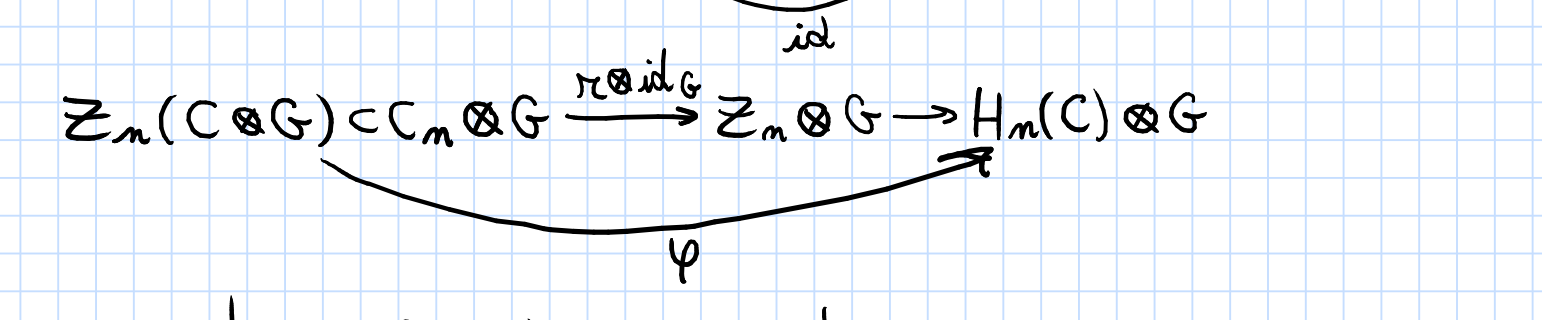
Allora abbiamo la succ. esatta

$$0 \rightarrow H_q(C) \otimes G \xrightarrow{\alpha} H_q(C \otimes G) \xrightarrow{\beta} Tor(H_{q-1}(C), G) \rightarrow 0$$

naturale, spezza e $\alpha: [z] \otimes y \mapsto [z \otimes y]$.

Dim.: $0 \rightarrow Z_m \rightarrow C_m \xrightarrow{d} B_{m-1} \rightarrow 0$ è esatta, B_{m-1} è libero (perché sottomodulo di libero) \Rightarrow

$\Rightarrow 0 \rightarrow Z_m \otimes G \rightarrow C_m \otimes G \rightarrow B_{m-1} \otimes G \rightarrow 0$ è esatta e spezza (perché anche quella prima spezzava). Continuo il diagramma:



succ. esatta lunga

$$B_m \otimes G \xrightarrow{f_m} Z_m \otimes G \rightarrow H_m(C \otimes G) \rightarrow B_{m-1} \otimes G \rightarrow Z_{m-1} \otimes G$$

Ex.: se $i_m: B_m \hookrightarrow Z_m, f_m = i_m \otimes id_G$.

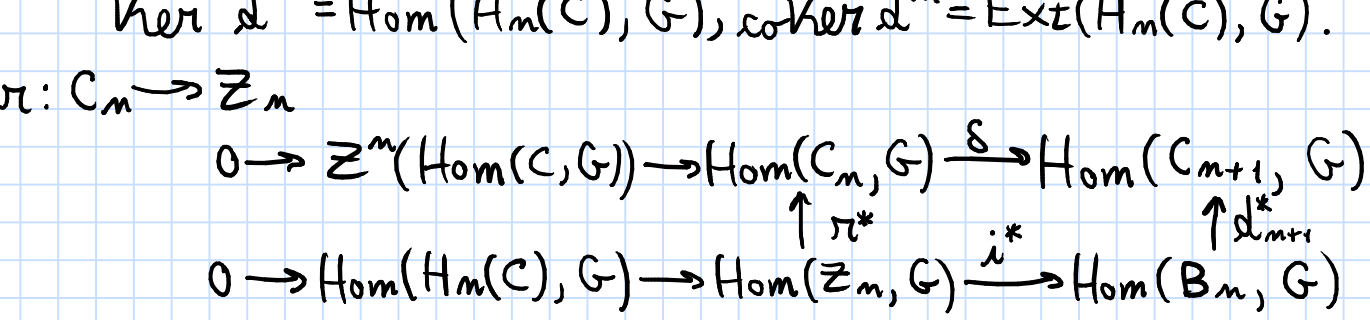
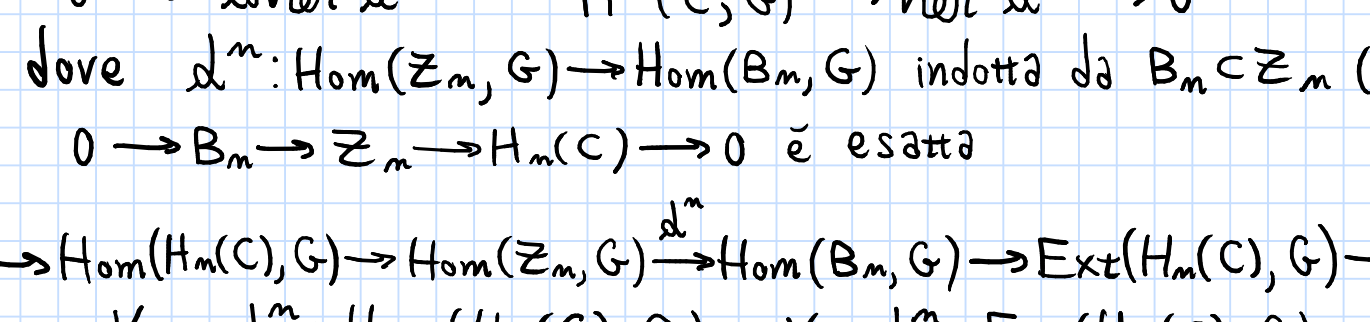
$0 \rightarrow B_m \xrightarrow{i_m} Z_m \rightarrow H_m(C) \rightarrow 0$ è risol. libera \Rightarrow

$\Rightarrow Ker(i_m \otimes id_G: B_m \otimes G \rightarrow Z_m \otimes G) = Tor(H_m(C), G)$.

$B_m \otimes G \xrightarrow{i_m \otimes id_G} Z_m \otimes G \rightarrow H_m(C) \otimes G \rightarrow 0$ esatta \Rightarrow

$\Rightarrow coker(i_m \otimes id_G: B_m \otimes G \rightarrow Z_m \otimes G) = H_m(C) \otimes G$

Ho $0 \rightarrow H_m(C) \otimes G \rightarrow H_m(C \otimes G) \rightarrow Tor(H_{m-1}(C), G) \rightarrow 0$



φ manda $B_m(C \otimes G)$ in 0 e induce

$$\rho: H_m(C \otimes G) \rightarrow H_m(C) \otimes G \text{ t.c. } \rho \alpha = id. \square$$

Prop. (teorema dei coefficienti universali per la coomologia):

sia (C, d) un complesso di catene di moduli liberi.

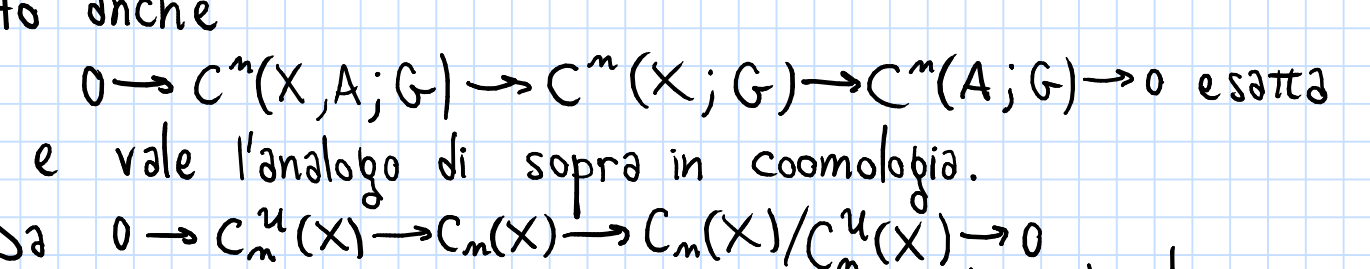
Allora c'è una successione esatta

$$0 \rightarrow Ext(H_{m-1}(C), G) \rightarrow H^m(C, G) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_m(C), G) \rightarrow 0$$

$\alpha: \psi \mapsto \alpha(\psi) (\psi: C_m \rightarrow G), \alpha(\psi)[c] := \psi(c)$.

La succ. è naturale (rispetto a mappe di complessi e rispetto a omo. di moduli (G)) e spezza in modo naturale rispetto a G ma non rispetto a C .

Dim.: $0 \rightarrow Z_m \rightarrow C_m \xrightarrow{d} B_{m-1} \rightarrow 0$ da cui



e ottengo succ. esatta lunga in omologia

$$0 \rightarrow coker d^{m-1} \rightarrow H^m(C, G) \rightarrow Ker d^m \rightarrow 0$$

dove $d^m: Hom(Z_m, G) \rightarrow Hom(B_m, G)$ indotta da $B_m \subset Z_m$ (ex.).

$0 \rightarrow B_m \rightarrow Z_m \rightarrow H_m(C) \rightarrow 0$ è esatta

$$0 \rightarrow Hom(H_m(C), G) \rightarrow Hom(Z_m, G) \xrightarrow{d^m} Hom(B_m, G) \rightarrow Ext(H_m(C), G) \rightarrow 0$$

$Ker d^m = Hom(H_m(C), G), coker d^m = Ext(H_m(C), G)$.

$\pi: C_m \rightarrow Z_m$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & Z^m(Hom(C, G)) & \rightarrow & Hom(C_m, G) & \xrightarrow{\delta} & Hom(C_{m+1}, G) \\
 & & \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\
 0 & \rightarrow & Hom(H_m(C), G) & \rightarrow & Hom(Z_m, G) & \xrightarrow{i^*} & Hom(B_m, G)
 \end{array}$$

Preso $\psi \in Ker i^*, \pi^*(\psi) \in Ker(\delta)$ e induce $Hom(H_m(C), G) \rightarrow H^m(C, G)$, $\psi \mapsto \psi \pi$

che dà lo spezzamento. \square

Cor.: se $H_{m-1}(C)$ è libero, $\alpha: H^m(C, G) \rightarrow Hom(H_m(C), G)$ è iso.

Cor.: (C, d) complesso di co-catene di R -moduli liberi,

$$0 \rightarrow H^q(C) \otimes G \rightarrow H^q(C \otimes G) \rightarrow Tor(H^{q+1}(C), G) \rightarrow 0.$$

Dim.: è una riscrittura dei coefficienti universali in omologia. \square

Cor.: se (C, d) è complesso di catene di R -moduli liberi, G R -modulo fin.gen. Allora

$$0 \rightarrow H^q(C) \otimes G \rightarrow H^q(C; G) \rightarrow Tor(H^{q+1}(C), G) \rightarrow 0.$$

Dim.: uso $Hom(C, R) \otimes G \simeq Hom(C, G)$ (iso. canonico). \square

Data una coppia (X, A) di s.t. ho

$$0 \rightarrow C_n(A) \rightarrow C_n(X) \rightarrow C_n(X, A) \rightarrow 0$$

(succ. esatta di moduli liberi spezza).

$0 \rightarrow C_n(A; G) \rightarrow C_n(X, G) \rightarrow C_n(X, A; G) \rightarrow 0$ è esatta \Rightarrow

\Rightarrow ho succ. esatta lunga di omologia della coppia a coefficienti in G .

Ho anche

$$0 \rightarrow C^n(X, A; G) \rightarrow C^n(X; G) \rightarrow C^n(A; G) \rightarrow 0 \text{ esatta}$$

e vale l'analogo di sopra in coomologia.

Da $0 \rightarrow C_n^u(X) \rightarrow C_n(X) \rightarrow C_n(X)/C_n^u(X) \rightarrow 0$

(esatta corta di abeliani liberi \Rightarrow spezza), \hookrightarrow omologia banale

applicando $Hom(\cdot, G)$ o $\otimes G$ ottengo MV.

Analogo per escissione.

$$Es.: H^i(S^n; G) = \begin{cases} G & i=0, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$H^i(\mathbb{C}P^n; G) = \begin{cases} G & i \leq 2n \text{ } 2 \mid i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$H^i(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \forall 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Prodotto cup \cup

Sia A anello commutativo, voglio definire una mappa A -bilineare

$$H^i(X; A) \times H^j(X; A) \xrightarrow{\cup} H^{i+j}(X; A) \text{ che renda}$$

$H^*(X; A) = \bigoplus_{m \geq 0} H^m(X; A)$ un anello graduato con prodotto graded-commutative: $\alpha \cup \beta = (-1)^{|\alpha| \cdot |\beta|} \beta \cup \alpha$.

Dati $(C, d_C), (D, d_D)$ complessi di catene, definisco

$$C \otimes D \text{ con } (C \otimes D)_m = \bigoplus_{p+q=m} C_p \otimes D_q \text{ e}$$

$$d_m: (C \otimes D)_m \rightarrow (C \otimes D)_{m-1} \text{ dato da}$$

$$d_m(\alpha \otimes \beta) = d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \otimes d_D(\beta) \quad (d^2=0).$$

Stessa def. per le co-catene.

Prop.: il prodotto di complessi di cui uno contraibile è contraibile.

Dim.: complessi C, D con C contr. $\Rightarrow id_C = d_C k + k d_C$,

$$k: C_m \rightarrow C_{m+1}. \text{ Definisco } k: (C \otimes D)_m \rightarrow (C \otimes D)_{m+1}$$

$$\alpha \otimes \beta \mapsto k(\alpha) \otimes \beta$$

Prendo $\alpha \in C_p$,

$$d k(\alpha \otimes \beta) = d(k(\alpha) \otimes \beta) = d_C k(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{|\alpha|+1} k(\alpha) \otimes d_D(\beta)$$

$$k d(\alpha \otimes \beta) = k(d_C(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \otimes d_D(\beta)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (d k + k d)(\alpha \otimes \beta) = id_C(\alpha) \otimes \beta = \alpha \otimes \beta. \square$$

Cor.: X contraibile $\Rightarrow \tilde{C} \cdot(X) \otimes \tilde{C} \cdot(X)$ contraibile.

$X \circ Y$ contraibile $\Rightarrow \tilde{C} \cdot(X) \otimes \tilde{C} \cdot(Y)$ contraibile.