$$C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(X) \xleftarrow{EZ} C_\cdot(X\times X) \xleftarrow{\Delta^*\ \text{mappa diagonale}} C_\cdot(X)$$

↳ la voglio esplicita

Lo stesso argomento usato per EZ mi dice che due qualsiasi morfismi naturali di complessi $C_\cdot(X)\to C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(X)$ t.c. $C_0(X)\to C_0(X)\otimes C_0(X)$ sono omotopi.
$x \longmapsto x\otimes x$

$p\leq n$, $a_p:\Delta_p\to\Delta_n$, $e_i\mapsto e_i$,

$q\leq n$, $b_q:\Delta_q\to\Delta_n$, $e_i\mapsto e_{n-q+i}$.

Dato $\sigma\in C_n(X)$ n-simplesso singolare,
considero $\sigma^1_p=\sigma\circ a_p$, $\sigma^2_q=\sigma\circ b_q$ ed estendo linearmente a
$C_n(X)\to C_p(X)$ e $C_n(X)\to C_q(X)$.
$\Delta\sigma_n=\sum_{p+q=n}\sigma^1_p\otimes\sigma^2_q$ $C_n(X)\xrightarrow{\Delta}(C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(X))_n$ e
in H^* $H^p(X)\otimes H^q(X)\to H^{p+q}(X)$.
$\varphi\otimes\psi\longmapsto\varphi\cup\psi$ (def. di cup product)
$C_0(X)\xrightarrow{\Delta}C_0(X)\otimes C_0(X)$, quindi è quella che cercavo.
$x\longmapsto x\otimes x$
↳ li mette su elearning
$\varphi\cup\psi(\sigma:\Delta^{p+q}\to X):=(-1)^{pq}\varphi(\sigma^1_p)\cdot\psi(\sigma^2_q)$ (conti).

Prop.: $\cup$ induce mappa di complessi di cocatene t.c.
$\delta(\varphi\cup\psi)=\delta\varphi\cup\psi+(-1)^{|\varphi|}\varphi\cup\delta\psi$.

Prop.: $\varphi\cup\psi=(-1)^{|\varphi|\cdot|\psi|}\psi\cup\varphi$.

Dim.: uso $\tau: C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(X)\to C_\cdot(X)\otimes C_\cdot(X)$.
$a\otimes b\longmapsto(-1)^{|a|\cdot|b|}b\otimes a$

τ è naturale e dà morfismo di complessi
$\tau\partial(a\otimes b)=\tau(\partial a\otimes b+(-1)^{|a|}a\otimes\partial b)=$
$=(-1)^{(|a|-1)|b|}b\otimes\partial a+(-1)^{|a|+|a|(|b|-1)}\partial b\otimes a$,
$\partial\tau(a\otimes b)=\partial((-1)^{|a|\cdot|b|}b\otimes a)=(-1)^{|a|\cdot|b|}\partial b\otimes a+(-1)^{|a|\cdot|b|+|b|}b\otimes\partial a\Rightarrow$
$\Rightarrow\partial\circ\tau=\tau\circ\partial$. Quindi posso usare un'"altra" approssimazione diagonale, componendo con τ. Essendo omotopa a quella di prima, ottengo la tesi. □
↳ uguali in grado 0

$\cup$ in H^* relativa.
$H^*(X,A)\otimes H^*(X,B)\to H^*(X,A\cup B)$
$\uparrow\Delta^*$
$H^*(X\times X, X\times B\cup A\times X)$
Se $a_i\in\ker(H^*(X)\to H^*(A_i))$, $A_i\subset X$,
$\exists\, b_i\in H^*(X,A_i)$ $b_i\mapsto a_i$ (succ. della coppia).
Se $X=\bigcup_{i=1}^m A_i$, $a_1\cup a_2\cup\dots\cup a_m=0$ perchè è immagine di
$b_1\cup b_2\cup\dots\cup b_m\in H^*(X,\bigcup_{i=1}^m A_i)=0$.

Es.: $\mathbb{CP}^n=U_{n+1}$ aperti affini omeo. a $\mathbb{C}^n\Rightarrow$
$\Rightarrow$ il prodotto di $n+1$ classi di $H^{>0}(\mathbb{CP}^n)$ è nullo
$H^{>0}(\mathbb{CP}^n)\simeq H^{>0}(\mathbb{CP}^n, \underbrace{\text{carta affine omeo. a }\mathbb{C}^n}_{\text{contraibile}})$.

Idem per $\mathbb{RP}^n$.
$S^n=\mathbb{R}^n\cup\mathbb{R}^n\Rightarrow$ il prodotto di due classi è sempre nullo,
$\Sigma X\Rightarrow$ " " " " " " " " .

Teo.: $H^\cdot(\mathbb{CP}^n;\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, x corrisponde a un generatore di $H^2(\mathbb{CP}^n)$.
$H^\cdot(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2)\simeq\mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$, x " " "
" " $H^1(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2)$.
$\mathbb{CP}^\infty$ $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{RP}^\infty$ $\mathbb{Z}_2[x]$.
Dim.: poi. □

Teo. (Borsuk-Ulam): $\nexists\, f: S^n\to S^{n-1}$ continua e dispari ($f(-x)=-f(x)$).
Dim.: se ci fosse, f induce $\bar f:\mathbb{RP}^n\to\mathbb{RP}^{n-1}$,
$\pi_1(\mathbb{RP}^n)=\pi_1(\mathbb{RP}^{n-1})=\mathbb{Z}/2$. Preso un cammino γ da x in S^n a $-x$ in S^n, $f_\#(\gamma)$ è cammino da y in $-y$.
$\bar f_\#:\pi_1(\mathbb{RP}^n)\to\pi_1(\mathbb{RP}^{n-1})$ è iso..

$$\begin{array}{ccc}\pi_1(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow{\sim\,\bar f_\#} & \pi_1(\mathbb{RP}^{n-1})\\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr\\ H_1(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow[\text{iso.}]{\bar f_*} & H_1(\mathbb{RP}^{n-1})\end{array}$$

Per coeff. univ.,
$H^1(\mathbb{RP}^{n-1};\mathbb{Z}/2)\to H^1(\mathbb{RP}^n;\mathbb{Z}/2)$ è iso.,
$\downarrow$ $\downarrow$
generatore $\leftarrow\omega\longrightarrow\omega'\to$ generatore
ma $\omega^n=0$, $(\omega')^n\neq 0$. □

Cor.: $f: S^n\to\mathbb{R}^n$ continua t.c. $f(-x)=-f(x)\Rightarrow\exists\, x\in S^n$ t.c. $f(x)=0$.
Dim.: considera $f/\|f\|$. □
Cor.: se $f: S^n\to\mathbb{R}^n$ continua, $\exists\, x$ t.c. $f(x)=f(-x)$.
Dim.: considera $f(x)-f(-x)$. □

Omologia di varietà

M varietà top. n-dim. cioè (def.) s.t. loc. omeo. a $\mathbb{R}^n$ e Hausdorff.
Es.: noti.
Teo.: una n-varietà ha una struttura di CW-c. di dim. n.
Dim.: no. □
Conseguenza: X n-var. $\Rightarrow H_i(X)=0\ \forall i>n$.
Se X è n-var. cpt., $H_i(X)$ è finit. gen..